UMSS

大学数学科学丛书—7

抽象空间引论

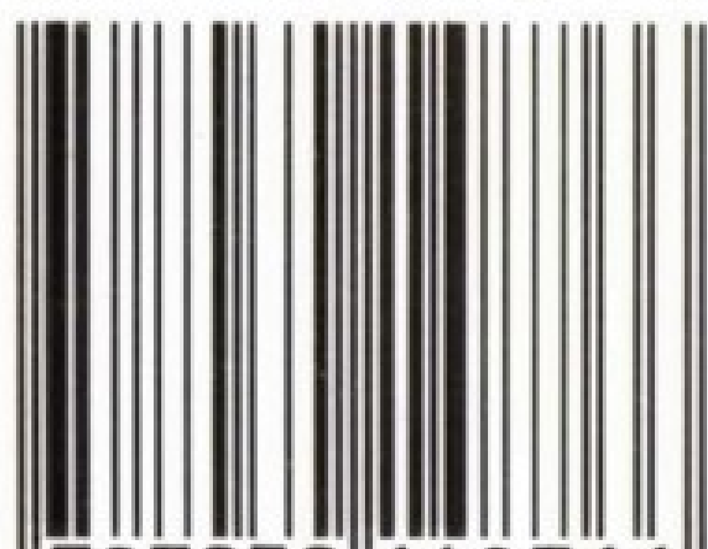
胡适耕　张显文　编著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2155.0101)

- 全面构建抽象空间谱系
- 深入阐述各类空间结构
- 系统演绎抽象空间方法
- 详细介绍典型空间实例



销售分类建议：高等数学

ISBN 7-03-014876-2
定 价：29.00 元

大学数学科学丛书　7

抽象空间引论

胡适耕　张显文　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以统一与基本的观点，概述应用上最重要的抽象空间，阐明其结构、内在联系及主要实例. 内容涵盖一般数学结构、拓扑空间、一致空间、度量空间、拓扑向量空间、Banach 空间，以及与空间结构相适应的一系列方法.

本书的读者对象为数学专业的高年级本科生，理工科的硕士生、博士生、教师以及自然科学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

抽象空间引论/胡适耕，张显文编著. —北京：科学出版社，2005
(大学数学科学丛书：7)
ISBN 7-03-014876-2

Ⅰ. 抽… Ⅱ. ①胡…②张… Ⅲ. 抽象空间-概论 Ⅳ. O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009913 号

责任编辑：吕 虹 张 扬 祖翠娥/责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷 印张：15 3/4
印数：1—3 000 字数：289 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材、教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

本书作者曾不只一次，在一些气氛颇热烈的讲座上（以科普的名义或者根本无关科普），聆听人们大谈高维空间，甚至拓扑空间. 在这种场合，你真会感到，人们对于未知空间领域的好奇是如此强烈，其热情似乎不逊于地理大发现时期的探险家！人们仿佛已经厌倦这个平淡无奇的4维宇宙，渴望到那些玄妙莫测的虚幻世界中去作一番漫游. 本来完全出于科学思考的抽象空间理论，在一些人那里被不经意地演绎成了真正的天外奇谈！严肃的数学工作者，对此恐怕无法苟同. 然而，在这个高度现实的世界上，看到抽象空间理论的影响竟如此之广，不能不深感庆幸与欣慰.

在当代世界，真正以研究抽象空间为主要目的的学者未必很多. 但受益于抽象空间理论者，则几乎遍及所有的数学家，其中包括那些更关注具体问题（如生物学或经济学问题）的应用数学家. 在当代数学界，如果不能顺利阅读大量使用抽象空间语言写成的著作，如果不能熟练摆弄几种抽象空间，要与同行进行有效的交流，大概是困难的. 抽象空间的思想与理论构造模式对于数学的统治，在一定程度上乃是现代数学的基本特征之一. 抽象空间何以有如此强大的威力，当然非此处所能深论. 但指出在数学界已成为共识的如下几点事实，对于本书的读者将不无益处.

人类的思维经验表明，将具体问题抽象化，可以带来可观的效果. 一个具体问题一旦被纳入抽象空间的框架之内，原本很复杂的对象（如序列、轨道、变换等），现在不过是空间中的一点而已. 无论这个点内部本来具有多大的丰富性与复杂性，都一概被抹去，而且在进一步的研究中不再起任何作用，这就使问题大大简化了. 对于问题的最终解决，那些被抹去的东西本来就是不起作用的，倒是它们的存在掩盖了问题的本质，一旦舍弃这些细节，本质的东西就会凸显出来.

其次，通过与平常空间的类比，抽象空间能获得比其原型更简单的直观形象，因而使得在抽象空间中进行的论证更好理解. 以为一个数学问题的原型是具体的、直观的，而转化成抽象空间中的问题后就变得笼统、抽象以致难以理解了，这实在是一种极大的误解. 用 n 次多项式逼近连续函数，这是一个具体但并不单纯的问题，经适当抽象之后，它变成了求某个赋范空间中的点到给定 n 维平面的最近距离点的问题，这就更容易理解了. 经抽象化处理的问题往往更直观，不明白这一点，就难以领会抽象空间理论的奥妙.

再者，正是抽象空间理论以高度概括的形式统一了外观上极不相同的对象，从而沟通了一些初看起来互不相关的领域，这就为获得新知识开辟了更多的渠道.

这不足为怪，对于大多数数学家及一部分其他领域的专家来说，抽象空间是一种不可或缺的工具. 然而，当你真正准备涉足抽象空间时，你会发现所面对的是一个惊人的庞大的理论体系. 一个服务于多个人类知识领域的抽象理论，必然有其丰富的内涵是很自然的. 另一方面，作为一种典型公理化建筑的抽象空间理论，几乎每天都在不受限制地开疆拓土. 只要不导致逻辑矛盾，人们总乐意通过引进新公理来扩大现有的概念世界，这就使得新的空间总是层出不穷. 那些有着坚实背景的抽象空间，固然会保持其长久生命力；而那些纯属人们过度自由的想像力之产物的空间，在科学理论发展的长河中，不过是稍纵即逝的流星. 问题在于，在数学家将种类繁多的抽象空间理出一个头绪来之前，人们由最初的好奇所激发的热情，或许早已在不得要领而毫无所获的随心游荡中消耗殆尽. 对于抽象空间的持久兴趣，最终只能缘于需要，而不仅仅因于猎奇. 而人们的需要主要集中于抽象空间理论中已经多少成熟，且被证明拥有广泛应用的部分. 将这一部分以某种概括而又相对简易的形式介绍给读者，正是本书意图之所在.

基于以上意图，本书选择了拓扑空间、度量空间、拓扑向量空间与赋范空间作为主要讨论对象，它们在现代抽象空间理论中所具有的基本意义，似乎是最不容置疑的.

除了在取材方面的考虑之外，本书也格外着意于揭示抽象空间理论构造所循的某些一般模式. 不同种类的空间固然因其公理选择的不同而结构各异，但这些空间理论的展开仍然呈现出高度的类似性，以致人们从异彩纷呈的抽象空间谱系中能看到某种和谐统一的图景. 这种体验，无论对于持欣赏眼光的数学家，还是对于更多地持实用眼光的应用工作者，都是十分有益的.

本书作者可以说是抽象空间理论的欣赏者与使用者，不过在写作本书时，更多地是从使用者的角度来考虑的，这或许更能与多数读者产生一定程度的共鸣. 例如，大多数定义与定理都表述得比较概括与集中，便于查询；再如，与一般的教科书不同，本书将空间的例子集中在几节中统一处理，这对于使用抽象空间的读者进行查考似乎更方便些. 如果这样做，会使将本书作为入门读物的读者有所不便，那么，作者只能以“天下事势难两全”为憾.

作　者

2003 年 8 月于武汉

符号与说明

一、符 号 表

A^c	集 A 的补
A°	集 A 的内部
A^0	A 的极集
$A^\perp$	A 的正交补或零化子
$\overline{A}$	集 A 的闭包
$\overline{A}_w$	弱闭包
$\overline{A}_{w^*}$	弱* 闭包
abco A	集 A 的绝对凸包
B_X	X 中的闭单位球，B_{X^*} 也写作 B^*
$B_r(a)$	以 a 为心以 r 为半径的开球
$\overline{B}_r(a)$	以 a 为心以 r 为半径的闭球
$\beta(X,Y)$	X 上由 Y 决定的强拓扑
$\mathbf{C}$	复数域
$C(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续映射之全体，$C(X)=C(X,\mathbf{K})$
$C^r(\Omega)$	Ω 上的 C^r 函数之全体
$C_0^r(\Omega)$	Ω 上有紧支集的 C^r 函数之全体
co A	集 A 的凸包；$\overline{\text{co}}A=\overline{\text{co}\,A}$
χ_A	集 A 的特征函数
$D(F)$	F 的定义域
$d(x,y),d(x,B),d(A,B)$	距离
diam A	集 A 的直径
dim X	空间 X 的维数
∂A	集 A 的边界
Δ 或 Δ_X	$X\times X$ 中的对角线
I	单位算子
1_X	X 上的单位算子
i	$A\subset X$：包含映射
J	通常记区间 $[0,1]$
$\mathbf{K}$	等于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$
K^+	K 的对偶锥



Ker F	同态 F 的核
L^p	p 次可积函数空间
L^∞	本性有界函数空间
l^p	等于 $L^p(\mathbf{N},\mu)$，μ 是计数测度
$l^p(\Omega)$	等于 $L^p(\Omega,\mu)$，μ 是计数测度
LCH	等于局部紧 Hausdorff 空间
LCS	等于局部凸空间
$L(X,Y)$	从 X 到 Y 的连续线性算子之全体，$L(X)=L(X,X)$
$M(\Omega)$	Ω 上的正则测度空间
μ	通常记测度
μ_A	集 A 的 Minkowski 泛函
$\mathbf{N}$	自然数集
$N(T)$	算子 T 的零空间
$\mathcal{N}_x$：	点 x 的邻域系
$p(\cdot)$	通常记半范
P,P_i	通常记投影
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数域，$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$，$\mathbf{R}_+^n=(\mathbf{R}_+)^n$
$R(F)$	F 的值域
S_X	X 中的单位球面，S_{X^*} 也写作 S^*
span A	集 A 的线性包，$\overline{\text{span}}\,A=\overline{\text{span}\,A}$
supp f	函数 f 的支集
$\sigma(X,Y)$	X 上由 Y 决定的弱拓扑
T	通常表线性算子
T^*	T 的对偶算子或相伴算子
TVS	等于拓扑向量空间
τ 或 τ_X	X 上的某个拓扑
$\mathcal{U}$	通常表一致结构或某个集族
X,Y,Z	通常记抽象空间
X^*	空间 X 的拓扑对偶
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}_+$	非负整数集，$\mathbf{Z}_+^n=(\mathbf{Z}_+)^n$
$\triangleq$	定义为
$\square$	定理或命题证毕
$\subset\subset$	强包含

二、几点说明

1. 引证　§1.1(1)表§1.1中式(1)，§1.1A表§1.1中A段，1.1.1(i)

表定理(或命题、定义)1.1.1之(i),[1.p.1]表参考文献[1]中第1页,余类推.

2. 指标用法 出现于 $\sum$,$\prod$,$\cup$,$\cap$ 下的指标通常省略. 和式 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 依情况可写成:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n\in\mathbf{N}}a_n,\quad \sum\nolimits_1^{\infty}a_n \text{ 或} \sum_n a_n.$$

$\prod A_n$, $\bigcup A_n$ 等仿此. 给定 $x\in\mathbf{R}^n$ 或 $x\in\mathbf{R}^{\omega}$, 自动认定 $x=(x_i)$, 对 $x\in\prod X_i$ 仿此.

3. 集记号 集 $\{x\in X: x \text{满足} P\}$ 常缩写作 $X(P)$ 或 $\{P\}$, 如 $\{f>0\}=\{x: f(x)>0\}$. $A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$, $A+x$, AB 仿此. $\mathscr{A},\mathscr{B},\beta,\tau$ 等记集族. $\mathscr{A}^{\sharp}=\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}$, $\mathscr{A}^{*}$ 记 $\mathscr{A}$ 中集的有限交之全体, $F\mathscr{A}=\{FA: A\in\mathscr{A}\}$; $\mathscr{A}'=\{A^c: A\in\mathscr{A}\}$. $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall B\in\mathscr{B},\exists A\in\mathscr{A}: A\subset B$; $\mathscr{A}\prec\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall A\in\mathscr{A},\exists B\in\mathscr{B}: A\subset B$.

4. 映射记号 $F: D\subset X\to Y$ 表 $F: D\to Y$ 并指明 D 看作 X 的子空间, $\varphi(\cdot,y)$ 表映射 $x\to\varphi(x,y)$, $\prod f_i$ 记 f_i 的积映射, (f_i) 记 f_i 的对角线映射.

5. 范数记号 $|\cdot|$ 记 $\mathbf{K}^n$ 中的 Euclid 范数, $\|\cdot\|_X$ 记 X 中的范数, $\|\cdot\|_0$ 记 sup 范数, $\|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数,不必区别时,赋范空间 $X,Y,L(X,Y),X^*$ 等中的范数都记作 $\|\cdot\|$, $\{\|\cdot\|_i\}$ 或 $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ 通常记半范族.

6. 零记号 数零、零向量、零算子与零泛函均记作 0.

7. 极限记号 $\lim\limits_n x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n}x_{mn}$ 分别表 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{m,n\to\infty}x_{mn}$, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=\lim\limits_{0<t\to 0}\varphi(t)$, $\rightrightarrows$ 记一致收敛, $\rightharpoonup$ 记弱收敛, $\xrightarrow{*}$ 记弱*收敛, $\xrightarrow{\mu}$ 记依测度 μ 收敛, $\xrightarrow{L^p}$ 记 L^p 收敛.

8. 不等式用法 $A\leqslant B\Leftrightarrow\forall a\in A, b\in B: a\leqslant b$; $A<b$, $A\leqslant b$, $f(A)\leqslant f(B)$ 等仿此; $f\leqslant g\Leftrightarrow\forall x\in D(f)=D(g): f(x)\leqslant g(x)$; $f<g$ 仿此.

9. const 的用法 当 const 出现在式子中时,它表示某个常数,其具体数值难以或不必明确写出.

10. 其他约定 $a\vee b=\max\{a,b\}$, $a\wedge b=\min\{a,b\}$; $\sup\varnothing=-\infty$, $\inf\varnothing=\infty$; 当 $\varnothing=\mathscr{A}\subset 2^X$ 时 $\bigcup\mathscr{A}=\varnothing$, $\bigcap\mathscr{A}=X$.

第1章　绪　　论

在现代科学中，抽象空间已被普遍地运用，大概不再有人怀疑其价值了.不过，何谓抽象空间，并无严格界定.通常将那些或多或少类似于平常空间的抽象数学结构称为抽象空间，从高度抽象的拓扑空间，到很接近于现实空间的高维 Euclid 空间.本书给出那些被公认为最有价值的抽象空间的一个导引性介绍.从追求简洁与逻辑关系的清晰考虑，我们应从最一般的拓扑空间开始，依次进入一致空间、度量空间、拓扑向量空间等，直至最特殊的函数空间.但这样一来，我们就会失去将抽象概念与具体模型交织起来的许多机会.弥补这一缺憾的方法看来是：一开始就同时给出将要论及的所有空间的一个初步描述，然后再逐一深入讨论.这样，在考虑较基本的空间（如拓扑空间）时，就能从很宽广的背景中寻求充分具体的例证.这就是这个绪论所要起的作用.或许你会耽心：一开始就面对一大堆抽象概念，可能会因不得要领而失去信心.实际上，你只需对本章稍作浏览就不妨转入其后各章，只是到有需要的时候，才回到本章仔细阅读相关的细节.

§1.1　集与映射

像抽象空间这样高度一般化的论题，必然完全在集论的形式语言下处理.因此，集论的基本用语、记号与表达方式，在本书中是不可缺少的，这些在本节中以最简略的形式加以介绍.

A. 集与集族

给定集 X. 表示一集 $A \subset X$ 的标准方式是

$$A = \{x \in X : x \text{ 满足 } P\}, \tag{1}$$

其中 P 是某个与 X 中的元有关的命题或条件.通常将(1)简写成 $A = X(P)$ 或 $A = \{P \text{ 成立}\}$.例如，若 $f: X \to \mathbf{R}$，A 是 f 在 X 上的零点之全体，则 A 可表为 $X(f = 0)$，或更简单地就写作 $\{f = 0\}$.

集运算的记号是标准的，假定已为读者所熟知.差集写作 $A \backslash B$，而将记号 $A - B$ 保留给代数系统使用.总以 A^c 表示补集 $X \backslash A (A \subset X)$，只要所用 X 是明确的.以 χ_A 记集 A 的特征函数，即 $\chi_A(x) = 1 (x \in A)$ 而 $\chi_A(y) = 0 (y \in A^c)$.

以 2^X 记 X 的子集之全体,称之为 X 的**幂集**. 2^X 的子集称为集族,通常记以字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\beta,\tau$ 等.本书中将大量运用集族,一些与之有关的记号与用语,综述于下.任给 $\mathscr{A}\subset 2^X$,约定

$$\bigcup \mathscr{A}=\bigcup \{A:A\in \mathscr{A}\},$$
$$\bigcap \mathscr{A}=\bigcap \{A:A\in \mathscr{A}\}.$$

$\bigcup \mathscr{A}$ 也记作 $\mathscr{A}^{\#}$. 若 $\mathscr{A}=\varnothing$($\varnothing$ 表空集),则约定 $\mathscr{A}^{\#}=\varnothing$ 而 $\bigcap \mathscr{A}=X$. 令

$$\mathscr{A}^{*}=\{\bigcap \mathscr{B}:\mathscr{B}\text{ 是 }\mathscr{A}\text{ 的有限子族}\},\tag{2}$$
$$\mathscr{A}'=\{A^c:A\in \mathscr{A}\}.\tag{3}$$

若 $\varnothing\,\overline{\in}\,\mathscr{A}^{*}$,则称 $\mathscr{A}$ 为**有限相交族**.若 $\mathscr{A},\mathscr{B}\subset 2^X$,则约定

$$\mathscr{A}\vdash \mathscr{B}\Leftrightarrow \forall B\in \mathscr{B},\exists A\in \mathscr{A}:A\subset B;\tag{4}$$
$$\mathscr{A}\prec \mathscr{B}\Leftrightarrow \forall A\in \mathscr{A},\exists B\in \mathscr{B}:A\subset B.\tag{5}$$

$\mathscr{A}\vdash B$ 意味着 $\mathscr{A}\vdash\{B\}$. 显然

$$\mathscr{A}\vdash \mathscr{B}\Leftrightarrow \mathscr{B}'\prec \mathscr{A}'.$$

运用以上记号,可将一些概念表述得很简单.下面就是一例.

1.1.1 定义　若非空集族 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 满足条件:

(i) $\varnothing\,\overline{\in}\,\mathscr{A}$;

(ii) $A,B\in \mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in \mathscr{A}$;

(iii) $\mathscr{A}\vdash A\subset X\Rightarrow A\in \mathscr{A}$,

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个**滤子**. 若 $\mathscr{A}$ 是一个滤子,$\mathscr{B}\subset \mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$(或 $\mathscr{B}^{*}\vdash \mathscr{A}$),则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个**滤基**(或**子滤基**).

显然,定义 1.1.1 中的条件(ii)可缩写成 $\mathscr{A}^{*}=\mathscr{A}$(用(2)).

1.1.2 命题　若非空族 $\mathscr{B}\subset 2^X$ 满足条件:

(i) $\varnothing\,\overline{\in}\,\mathscr{B}$;

(ii) $\forall A,B\in \mathscr{B}$, 有 $\mathscr{B}\vdash A\cap B(\Leftrightarrow \mathscr{B}\vdash \mathscr{B}^{*})$,

则 $\mathscr{B}$ 是某个滤子 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 的滤基.若仅假定 $\mathscr{B}$ 是有限相交族,则 $\mathscr{B}$ 是某个滤子 $\mathscr{A}$ 的子滤基,且 $\mathscr{A}$ 是 X 上包含 $\mathscr{B}$ 的最小滤子,称为由 $\mathscr{B}$ 生成的滤子.

证　在条件(i),(ii)下,易验证 $\mathscr{A}\triangleq\{A\subset X:\mathscr{B}\vdash A\}$ 是以 $\mathscr{B}$ 为滤基的滤子.若 $\mathscr{B}$ 是有限相交族,则 $\mathscr{B}^{*}$ 必满足条件(i),(ii),因而是某个滤子的滤基.

□

若 I 是一非空集,每个 $i\in I$ 对应一个集 $A_i\subset X$,则亦称 $\{A_i:i\in I\}$ 为 X 上的一个集族,通常简写作 $\{A_i\}$. 这种集族与作为 2^X 子集的集族在概念上并不一致,但今后并不严格区别.用得较多的是 $\{A_i:i\in \mathbf{N}\}$ 这种特殊情况,此时称 $\{A_i\}$ 为**集列**. 若 $A_i\subset A_{i+1}$(或 $A_i\supset A_{i+1}$),$i=1,2,\cdots$, 则称 $\{A_i\}$ 为**升列**(或**降列**).

任给集 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 称

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in X_i (1 \leqslant i \leqslant n)\} \tag{6}$$

为集 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的**积集**,亦记作 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$;当 $X_i = X(1 \leqslant i \leqslant n)$ 时约定 $\prod X_i = X^n$,称它为 X 的 $\boldsymbol{n}$ **重积**.

B. 关系与映射

任给非空集 X 与 Y,不妨将二者看作抽象变量 x 与 y 的变域.这就自然提出一个问题:如何一般地界定 x 与 y 相关? 如果不加任何特殊限制,关系概念的形式定义就如下面所述这样简单.

1.1.3 定义 设 X 与 Y 是两个非空集.任何子集 $F \subset X \times Y$ 称为一个从 X 到 Y 的**关系**;当 $(x,y) \in F$ 时说 x 与 y 为 F 相关,记作 xFy 或 $y \in Fx$. 若 $F \subset X \times X$,就说 F 是 X 上的一个**二元关系**.

任给 $F \subset X \times Y, A \subset X$,约定

$$F(A) = \{y \in Y: \exists x \in A, 使(x,y) \in F\}; \tag{7}$$

令 $Fx = F(\{x\})$. 显然 $F(A) = \bigcup_{x \in A} Fx$. 若 $G \subset Y \times Z$,则令

$$G \circ F = \{(x,z): \exists y \in Y, 使 z \in Gy, y \in Fx\}; \tag{8}$$

$$F^{-1} = \{(y,x):(x,y) \in F\}, \tag{9}$$

称 $G \circ F$ 为 G 与 F 的**复合关系**,称 F^{-1} 为 F 的**逆关系**.令 $D(F) = F^{-1}(Y)$, $R(F) = F(X)$,二者分别称为 F 的**定义域**与**值域**.显然 $D(F) = R(F^{-1})$. 若 $F \subset X \times X, F = F^{-1}$,则说 F 是**对称的**;若 $F \circ F \subset F$,则说 F 是**传递的**;若

$$\Delta \triangleq \{(x,x): x \in X\} \subset F,$$

则说 F 是**自反的**;上述的 Δ 称为 $X \times X$ 的**对角线**,亦记作 Δ_X. 若 F 是对称的、传递的与自反的,则称 F 为一个**等价关系**.

给定 $F \subset X \times Y$,每个 $x \in X$ 确定地对应一个集 $Fx \subset Y$. 因此,F 可理解为如下的对应规则:

$$F: X \to 2^Y, \qquad x \to Fx. \tag{10}$$

若将每个 $y \in Fx$ 理解为 F 在 x 取的值,则可以说对应(10)确定一个多值函数(或集值函数).应用上最重要的是以下特殊情况:$\forall x \in X, Fx$ 恰含一个元素,就写作 Fx,则对应(10)可写成

$$F: X \to Y, \qquad x \to Fx, \tag{10$'$}$$

此时称 F 为从 X 到 Y 的一个**映射**.映射也称为函数、算子、变换等,这些都看作同义语,实质上并无区别.今后总是以 $F: X \to Y$ 表示 F 是从 X 到 Y 的映射这一事实.若 $F: X \to Y, R(F) = Y$,则称 F 为**满射**;若 F^{-1} 是映射,则称 F 为**单射**;若 F 同时为单射与满射,则称 F 为**双射**. $F: X \to Y$ 是双射的充要条件是:存在映射 $G: Y \to X$,使得

$$G \circ F = 1_X, \qquad F \circ G = 1_Y,$$

其中 $1_X = \Delta_X$ 称为 X 上的**单位映射**或**单位算子**，亦记作 I.

设 $F \subset X \times Y, G \subset Y \times Z, A, A_i \subset X(i \in I)$. 以下公式是常用的：

$$(F^{-1})^{-1} = F, \qquad (G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}, \tag{11}$$

$$F\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i F(A_i), \tag{12}$$

$$F\left(\bigcap_i A_i\right) \subset \bigcap_i F(A_i), \tag{13}$$

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)). \tag{14}$$

若 F^{-1} 是映射，则(13)为等式；若 F^{-1} 是映射且 $R(F) = Y$，则

$$F(A^c) = (F(A))^c. \tag{15}$$

若 $F \subset G \subset X \times Y$，则称 G 为 F 的**扩张**，称 F 为 G 的**限制**. 以上所述自然都可用于 F, G 是映射的情况. 不过对映射 $F: X \to Y$ 有以下特殊结论：FF^{-1} 恒为映射，且 $FF^{-1} \subset 1_Y$，$F^{-1}F$ 恒为等价关系. 因此，对 $A \subset X, B \subset Y$ 有

$$FF^{-1}(B) \subset B, \qquad A \subset F^{-1}F(A). \tag{16}$$

当 F 为满射时(16)的第一个包含为等式.

对于映射 $F: X \to Y, A \subset X$，今后将用较简便的记号 $FA = F(A)$，并用 $F \mid A$ 表示 F 在 A 上的**限制**，即 $F \mid A: A \to Y, x \to Fx$. 以 $i: A \subset X$ 记**包含映射**，即 $i = I \mid A$.

C. 序结构

1.1.4 定义　设 X 是一非空集，$\leqslant$是 X 上的一个二元关系，给定以下条件：

(A_1) 反对称性：$x \leqslant y \leqslant x \Rightarrow x = y(x, y \in X)$；

(A_2) 完全性：$\forall x, y \in X, x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 必居其一；

(A_3) 良序性：若 $\varnothing \neq A \subset X$，则 $\exists a \in A, \forall x \in A: a \leqslant x$.

若$\leqslant$是自反的与传递的，则称$\leqslant$为**拟序**；满足条件(A_1)的拟序称为**半序**或**偏序**；满足条件(A_2)的半序称为**全序**；满足条件(A_3)的全序称为**良序**. 当$\leqslant$是拟序时称 X 或 $(X, \leqslant)$ 为拟序集；类似地，半序集、全序集与良序集的意义是自明的.

记号$\leqslant$本身已经显示出关系 $x \leqslant y$ 指示出 x 与 y 之间的某种顺序；这种顺序关系未必就是通常的大小关系，但与大小关系确有明显类似之处，因而促使人们将基于大小关系的一些概念移植到序结构中来.

1.1.5 定义　设 $(X, \leqslant)$ 是一半序集，$A \subset X$. 若 $b \in X, A \leqslant b$（这意味着 $\forall a \in A$，有 $a \leqslant b$），则称 b 为 A 的**上界**. 若 b 是 A 的上界且 A 的任一上界 $b' \geqslant b (\Leftrightarrow b \leqslant b')$，则称 b 为 A 的最小上界或**上确界**，它必定是唯一的，记作

$\sup A$. 若 b 是 A 的上界且 $b \in A$，则称 b 为 A 的**最大元**. 若 $b \in A$ 且 $b \leqslant a \in A \Rightarrow b = a$，则称 b 为 A 的**极大元**.

类似地，可定义下界、下确界 ($\inf A$)、最小元与极小元.

直接从定义看出，最大元必定是极大元与上确界，在全序集中最大元与极大元等价. 除此之外，在最大元、极大元与上确界三者之间，并不存在必然联系.

关于极大元的以下结论是许多重要数学定理证明的基础，而它自身却不能被独立证明，因而只能作为一条公理使用.

1.1.6 极大原理 若半序集 X 的每个全序子集有上界，则 X 至少有一个极大元.

D. 基数与可数性

一个简单但不被人注意的事实是：一个自然数 n，原不过是含 n 个元素的所有集组成的集类的等价物. 这一想法可加以推广.

1.1.7 定义 任给集 A,B，若存在一个从 A 到 B 的双射，则说 A 与 B 有相同的**基数**，写作 $|A| = |B|$，并称 $|A|$ 为 A 的基数. 若存在一个从 A 到 B 的单射，则约定 $|A| \leqslant |B|$；规定

$$|A| < |B| \Leftrightarrow |A| \leqslant |B| \neq |A|.$$

当 A 是含 n 个元的有限集时，自然将 $|A|$ 理解为 n，约定 $|\varnothing| = 0$. 对于无限集 A，通常也用一个字母如 α 记 $|A|$，且说"A 含有 α 个元". 但这一说法并不具有比定义 1.1.7 所赋有的更多的含义.

一个具有重大意义的基本结论是，基数间的关系 $\leqslant$ (依定义 1.1.7) 是一个全序，它可看作自然数大小顺序的扩充. 约定 $\omega = |\mathbf{N}|$，$c = |\mathbf{R}|$，熟知 $\omega < c$.

若 A 是一个集，$|A| \leqslant \omega$，则称 A 为**可数集**. 显然，非空集 A 可数的充要条件是：A 的全体元素可排列成一个有限或无限序列. 但据此来判定可数性却不易成功，因而需要一些间接的判别法. 常用的方法综合在以下定理中.

1.1.8 定理 给定集 A，以下每个条件蕴涵 A 的可数性：

(i) 存在可数集 B 与单射 $F: A \to B$ (或满射 $F: B \to A$)；

(ii) A 是可数个可数集之并；

(iii) A 是有限个可数集之积集；

(iv) 存在可数个可数集 $I_n (n \in \mathbf{N})$，使 A 可表成

$$A = \{x_{i_1 i_2 \cdots i_n} : i_k \in I_k, 1 \leqslant k \leqslant n, n \in \mathbf{N}\}.$$

证 (i) 若 $F: A \to B$ 是单射，则 $|A| \leqslant |B| \leqslant \omega \Rightarrow |A| \leqslant \omega$. 若 $F: B \to A$ 是满射，不妨设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$，则 $A = \{Fb_1, Fb_2, \cdots\}$，顺次除去其中重复

的元，知 A 为可数集.

(ii) 不妨设 $A=\bigcup_1^\infty A_n, A_n=\{a_{nk}:k\in\mathbf{N}\}$. $A=\{a_{nk}:n,k\in\mathbf{N}\}$ 显然可写成一个序列，除去其中重复的元后知 A 为可数集.

(iii) 只需考虑 $A=B\times C, B, C$ 可数. $\forall b\in B, C_b\triangleq\{b\}\times C$ 显然可数，因此 $A=\bigcup\{C_b:b\in B\}$ 为可数集.

(iv) A 可表成 $A=\bigcup_1^\infty A_n$，其中

$$A_n=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}:i_k\in I_k, 1\leqslant k\leqslant n\}.$$

对应

$$\prod_1^n I_k\to A_n,\qquad (i_1,i_2,\cdots,i_n)\to x_{i_1i_2\cdots i_n},$$

显然是一满射，于是结合已证的(i)～(iii)知 A 为可数集. □

若 A,B 是两个良序集，存在保序双射 $F:A\to B$（保序意味着 $x\leqslant y\Leftrightarrow Fx\leqslant Fy, x,y\in A$），则说 A 与 B 有相同的**序数**，记作 $o(A)=o(B)$，并称 $o(A)$ 为 A 的序数. 显然 $o(A)=o(B)\Rightarrow|A|=|B|$，因此每个序数对应唯一一个基数，称为该序数的基数. 任给序数 μ，以 $\varphi(\mu)$ 记 μ 的基数. 反之，任给基数 α，必有最小的序数 μ，使 $\alpha=\varphi(\mu)$，将此 μ 记为 $\psi(\alpha)$. 若 $o(A)=\alpha, o(B)=\beta$，存在 $b_0\in B$，使集 $\{b\in B:b<b_0\}$ 有序数 α，则规定 $\alpha<\beta$ 或 $\beta>\alpha$，集 $\{\alpha:\alpha$ 是序数且 $\alpha<\beta\}$ 的序数为 β.

任给序数 μ，称 $\mu+1$ 为其后继序数，而称 μ 为 $\mu+1$ 的前趋序数. 若 μ 有前趋序数或 $\mu=0$，则称 μ 为孤立序数；非孤立序数称为极限序数. $\psi(\omega)$ 是最小的无限序数，因而是极限序数，仍记作 ω. 以 ω_1 记最小的不可数序数，它亦是极限序数. 若 $\alpha_i<\omega_1(i\in\mathbf{N})$，则可证明 $\sup\alpha_i<\omega_1$.

E. 数学结构

在最一般的意义上，现代数学可看作以各种数学结构为研究对象的学科. 此处不拟对数学结构作完全严格的描述，只是给出一个最粗略的勾画. 一个数学结构（或称数学系统）包含三个要素：

(i) 对象集 X（或若干对象集 X,Φ 等），它提供系统所要研究的对象或元素，当将 X 看作抽象空间时，通常将其中的元素称为点.

(ii) 一组关系（或映射）$\{R_i\}$，每个 R_i 描述了对象间的某种关联，从而在原不过是块白板的对象集上赋予了一定的结构.

(iii) 一组公理 $\{A_j\}$，它们规定了关系或映射 R_i 所应服从的规则.

由上述三要素组成的逻辑系统，原则上涵盖了现代数学可能处理的所有系统，作为一种理论构建模式，其发展空间实际上是无限的. 以上描述仅仅指明了数学结构的最一般特征，这丝毫也不限制个别的数学系统在结构上的多

样性与丰富性.一般来说,一个系统的结构愈简单,就愈可能成为较复杂系统的基础,因而愈有普遍价值.被公认为最具普遍价值的三种基本数学结构是:**序结构**、**代数结构**与**拓扑结构**①,其他数学结构大多是这些基本结构的综合与细化.序结构也许是最简单的数学结构,在第C段中对它所作的初步描述可以说典型地表现出数学结构的基本特征.在§1.2中我们将简要地谈到代数结构;而对于抽象空间理论最重要的拓扑结构,将是本书要重点阐述的对象之一.

对于理解数学结构很重要的一点是,应注意数学结构的对象集固然是不可缺少的,但其具体形式则不是本质的,本质的东西只是决定结构类别的关系与公理.如果两个同类数学结构在某一变换之下能实现其构成要素之间的一一对应,那么就可以认为二者并无实质区别.因此,在现代数学结构理论中,各种含义的**同构**及同构变换下的**不变量**概念具有最重要的意义.

本书致力于考虑的抽象空间,通常是多种基本结构的复合,唯其如此,其中才可以展开适合应用需要的丰富理论.当多种结构共存于一个底空间(即前述的对象集 X)上时,重要的问题是这些结构是否彼此相容?相容性的含义因情况而异.如对于拓扑代数系统而言,拓扑结构与代数结构相容意味着代数运算是连续的,这种相容性显示出两种结构并列地结合的特征.另一方面,一个空间上的拓扑结构与度量结构相容则意味着拓扑恰由度量生成,这种意义上的相容显然带有从属关系的特征.由一个给定的结构(如度量)衍生出抽象层次上更基本的结构(如一致结构与拓扑),是抽象空间理论的基本特征之一.

§1.2 代数系统

简单说来,所谓代数系统就是定义了若干代数运算并满足一定运算规则的数学结构.本书考虑的几类主要抽象空间,如拓扑向量空间与Banach空间,都是代数系统.因此,关于代数系统的某些基本知识是阅读本书所必需的.

A. 基本代数结构

设 X 是一非空集.任何映射 $\beta: X\to X$ 可解释为 X 上的一个**一元运算**,而任何映射 $\varphi: X\times X\to X$ 都可称为 X 上的**二元运算**,不妨约定称 φ 为乘法(或加法),相应地将 $\varphi(x,y)$ 写作 xy(或 $x+y$).当然,仅当这样的运算具有多少类似于平常乘法(或加法)的性质时,才有可利用的价值.

1.2.1 定义 设非空集 X 上定义了一个二元运算(姑且称作乘法),它满

① 如一些作者所指出的,测度结构的基本性亦是众所公认的.

足以下**群公理**:

(G_1) 结合律: $(xy)z = x(yz)(x,y,z \in X)$;

(G_2) 单位元:存在 $e \in X$, 使得 $ex = x = xe(\forall x \in X)$, 易推出这样的 e 必唯一,称它为**群单位元**;

(G_3) 可逆性: $\forall x \in X, \exists y \in X$, 使得 $xy = yx = e$, 可验证这样的 y 由 x 唯一决定,称为 x 的**逆元**,记作 x^{-1},

则称 X 为一个**群**;若 X 还满足公理

(G_4) 交换律: $xy = yx(x,y \in X)$,

则称 X 为**交换群**或 Abel 群.

群 X 中的运算亦可称为加法,当然,这样一来就应将定义 1.2.1 中的 xy 改为 $x+y$, 而单位元与逆元则分别改称为**零元**与**负元**,并分别改用记号 0 与 $-x$. 当需要强调群 X 中的运算称作乘法(或加法)时,称 X 为**乘法群**(或**加群**). 说到加群时,通常总假定它是交换群. 典型的加群是 $\mathbf{R}^n$, 其中的加法就是通常的向量加法.

1.2.2 定义　设 X 是一个加群, $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$,对 X 定义了数乘运算 $\mathbf{K}\times X \to X, (\alpha,x)\to \alpha x$ (称 αx 为 α 与 x 的乘积),使得以下条件满足:

(i) 分配律: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

(ii) 结合律: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

(iii) $1x = x$ (以上 $\alpha,\beta \in \mathbf{K}, x,y \in X$),

则称 X 为 $\mathbf{K}$ 上的**向量空间**,称 X 中的元为向量;当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$)时称 X 为**实**(或**复**)向量空间.

向量空间中的加法与数乘合称为**线性运算**.

1.2.3 定义　设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,其中定义了一个乘法 $X\times X \to X$, $(x,y)\to xy$, 它满足以下条件:

(i) 结合律: $(xy)z = x(yz)$;

(ii) 分配律: $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$;

(iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ (以上 $\alpha \in \mathbf{K}, x,y,z \in X$),

则称 X 为 $\mathbf{K}$ 上的**代数**;当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$)时称 X 为**实**(或**复**)代数;当乘法满足交换律时,称 X 为**交换代数**.

设 Ω 是一非空集, X 由某些从 Ω 到 $\mathbf{K}$ 的函数组成. 任给 $\alpha,\beta \in \mathbf{K}, x,y \in X$, 定义

$$\begin{cases}(\alpha x+\beta y)(t) = \alpha x(t) + \beta y(t), \\ (xy)(t) = x(t)y(t)\end{cases} \quad (t \in \Omega). \tag{1}$$

若恒有 $\alpha x + \beta y \in X$ (以及 $xy \in X$),则 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间($\mathbf{K}$ 上的交换代数). 应用上常见的向量空间几乎都以上述函数空间的形式出现.

下面以 X 泛指群、向量空间与代数三者中任一种. 任给 $A,B\subset X,\alpha\in\mathbf{K}$, 约定

$$A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\},$$
$$AB=\{ab:a\in A,b\in B\},$$
$$\alpha A=\{\alpha x:x\in A\},$$

只要其中的 $a+b,ab,\alpha x$ 有定义. 仿此 $a+B,aB,A^{-1},\mathbf{K}x$ 等记号的意义自明.

若 X 是一个群, X 的非空子集 A 依 X 中的运算亦构成群,则称 A 为 X 的**子群**. 类似地可定义向量空间(或代数)的**子空间**(或**子代数**). 设 $\varnothing\neq A\subset X$. 若 X 是乘法群,则 A 是 X 的子群的充要条件是

$$AA^{-1}\subset A. \tag{2}$$

若 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,则 A 是 X 的子空间的充要条件是

$$\alpha A+\beta A\subset A \qquad (\forall\,\alpha,\beta\in\mathbf{K}). \tag{3}$$

若 X 是代数, A 是其子空间,则 A 是子代数的充要条件是 $AA\subset A$. 若将此条件加强为

$$XA\subset A \qquad AX\subset A, \tag{4}$$

则称 A 为 X 的**双边理想**. 若群 X 的子群 A 满足条件

$$xA=Ax \qquad (\forall\,x\in A), \tag{5}$$

则称 A 为 X 的**正规子群**. 显然,交换群的子群皆为正规子群.

B. 同态与同构

1.2.4 定义 设 $T:X\to Y$. 若 X,Y 是乘法群,映射 T 满足条件

$$T(xy)=Tx\cdot Ty \qquad (x,y\in X), \tag{6}$$

则称 T 为**群同态**. 若 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间, T 满足条件

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \qquad (\alpha,\beta\in\mathbf{K},x,y\in X), \tag{7}$$

则称 T 为线性同态或**线性算子**;从 X 到 $\mathbf{K}$ 的线性算子称为**线性泛函**. 若 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的代数, T 同时满足条件(6)与(7),则称 T 为**代数同态**. 在以上三种情况下,记 $T\in\mathrm{Hom}(X,Y)$, 且当 T 是单射、满射或双射时分别称 T 为**单同态**、**满同态**与**同构**;群、向量空间与代数之间的同构分别称为**群同构**、**线性同构**与**代数同构**.

概括地说, $T\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ 保持 X 中的运算,这意味着:若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X,\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经 X 中的运算得出的式子,则

$$T\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(Tx_1,Tx_2,\cdots,Tx_n). \tag{8}$$

例如,若 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间, $\alpha_i\in\mathbf{K},x_i\in X(1\leqslant i\leqslant n)$, 则

$$T\Big(\sum_i\alpha_ix_i\Big)=\sum_i\alpha_iTx_i. \tag{9}$$

设 $T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$，利用式(6)，(7)(或其一般化(8))，容易推出以下事实. 若 $A \subset X$ 是子群(或子空间、子代数)，则 TA 是 Y 的子群(或子空间、子代数). 若 X,Y 是乘法群，$e \in Y$ 是单位元，则 $T^{-1}(e)$ 是 X 的正规子群；若 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间(或代数)，$0 \in Y$ 是零元，则 $T^{-1}(0)$ 是 X 的子空间(或双边理想). 上述的 $T^{-1}(e)$ 或 $T^{-1}(0)$ 称为同态 T 的**核**或**同态核**，记为 $\mathrm{Ker}\,T$. 对于线性同态 T 则常用记号 $N(T)=\mathrm{Ker}\,T$，且称 $N(T)$ 为 T 的零空间. 显然，$T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ 是单同态 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,T$ 是单元素集.

C. 积结构

我们分集论与代数系统两个层次考虑积结构.

首先定义积集. 给定一族集 $X_i(i \in I)$，令

$$X=\left\{x:I \to \bigcup_i X_i \mid x(i) \in X_i(\forall i \in I)\right\}, \tag{10}$$

称 X 为 $X_i(i \in I)$ 的**积集**，记作 $\prod_{i\in I} X_i$ 或 $\prod X_i$. 通常将积集 X 中的元 x 写作 (x_i)，其中 $x_i=x(i)$ 称为 x 的"第 i 坐标". 这样，一般的积集就具有了很接近于有限积(依§1.1(6))的外观. 任给 $i \in I$，称映射

$$P_i:X \to X_i,\quad x \to x_i \tag{11}$$

为**投影**，它显然是一个满射，后面将作为描述积结构的一个主要工具. 若 $A_i \subset X_i(i \in I)$，则有自然的包含

$$\prod_i A_i \subset \prod_i X_i.$$

显然 $\prod A_i=\varnothing \Leftrightarrow$ 某个 $A_i=\varnothing$ ①. 容易验证

$$\prod_i A_i=\bigcap_i P_i^{-1}A_i. \tag{12}$$

若 $X_i \equiv Y(i \in I)$，则记 $\prod X_i$ 为 Y^I. 依(10)，Y^I 就是从 I 到 Y 的映射之全体. 因此，给出一个映射 $F:X \to Y$，无非就是给出一个元 $F \in Y^X$. 注意 Y^I 实质上仅决定于 I 的基数. 若 $|I|=n \in \mathbf{N}$，则记 Y^I 为 Y^n，它就是§1.1A 中界定的 n 重积；若 $|I|=\omega$，则记 Y^I 为 Y^ω，Y^ω 就是 Y 中的无限序列之全体，如 $\mathbf{R}^\omega$ 即无限实数列之全体.

联系于积集有两种构成映射的方法. 首先，任给一族映射 $F_i:\Omega \to X_i(i \in I)$，可唯一地构成映射

$$F:\Omega \to \prod_i X_i,\omega \to (F_i\omega). \tag{13}$$

---

① 严格地说，"$\prod A_i=\varnothing \Rightarrow$ 某个 $A_i=\varnothing$"依赖于选择公理.

记这样的 F 为 (F_i)，称它为 $F_i(i \in I)$ 的**对角线映射**，称 F_i 为 F 的"第 i 分量". 注意，任何映射 $F:\Omega \to \prod X_i$ 都可写成 $F=(F_i)$，只要令 $F_i = P_iF$，P_i 依(11).

其次，若给定一族映射 $F_i:X_i \to Y_i(i \in I)$，则可定义所谓**积映射**

$$\prod_i F_i:\prod_i X_i \to \prod_i Y_i,(x_i) \to (F_ix_i). \tag{14}$$

例如，当 $I=\{1,2\}$ 时对 $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ 有

$$(F_1 \times F_2)(x_1,x_2) = (F_1x_1,F_2x_2). \tag{14$'$}$$

现在转向代数层面上的积结构. 设 $X_i(i \in I)$ 是一族同类代数系统，$X=\prod X_i$. 我们的问题是：应如何将 X 定义为与 X_i 同类的代数系统，使得每个投影 P_i 为同态？这一问题的解答原来很简单：设 $\varphi(x,y,\cdots,u)$ 是所论代数系统中的运算，则 P_i 为同态意味着(参照(8))

$$P_i\varphi(x,y,\cdots,u) = \varphi(P_ix,P_iy,\cdots,P_iu),$$

这显然相当于

$$\varphi(x,y,\cdots,u) = (\varphi(x_i,y_i,\cdots,u_i)). \tag{15}$$

(15)唯一地决定了积结构中运算的定义.

具体地说，若 $X_i(i \in I)$ 是乘法群，则在 $X=\prod X_i$ 中定义乘法：

$$xy = (x_iy_i) \qquad (x,y \in X); \tag{16}$$

若 $X_i(i \in I)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，则在 X 中定义线性运算：

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_i + \beta y_i) \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{K},x,y \in X). \tag{17}$$

在以上两种情况下，易验证 X 成为乘法群或 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，分别称为 $X_i(i \in I)$ 的**积群**与**积向量空间**(简称积空间). 类似地可考虑积代数. 直观上，(15)～(17)无非是说：积结构中的运算归结为依坐标运算，因此自然服从同样的运算规则.

积空间的一个最常用的例子是 $\mathbf{K}^\Omega$，此处 Ω 是任给非空集，而 $\mathbf{K}$ 既可看作向量空间，又可看作代数，因而依上面的讨论，$\mathbf{K}^\Omega$ 是一个 $\mathbf{K}$ 上的向量空间(同时也是一个代数)，其中的运算就是通常函数的按点运算. 本书将考察的许多函数空间，正是这种 $\mathbf{K}^\Omega$ 的子空间.

D. 商结构

我们同样从集与代数两个层次考虑商结构.

给定非空集 X，设 R 是 X 上一等价关系，这意味着 $\Delta \subset R, R=R^{-1}, R \circ R \subset R$ (参考§1.1B). 为简单起见，下面记 xRy 为 $x \sim y$. 令

$$\tilde{x} = R(x) = \{y \in X: y \sim x\}, \tag{18}$$

称 $\tilde{x}$ 为含 x 的等价类. 从 R 为等价关系容易推出，两个等价类 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 要么重合，要么互不相交. X 中等价类之全体构成一集 $\widetilde{X}$，称为 X 关于 R 的**商集**，也记作 X/R；称映射

$$P:X \to \widetilde{X}, x \to \tilde{x} \tag{19}$$

为**投影**，P 显然是一满射. 注意到 P 唯一地决定于条件"$x \sim y \Leftrightarrow Px = Py$"，易得出等式

$$R = P^{-1}P. \tag{20}$$

反之，任给满射 $T:X \to Y$，在 §1.1B 中已指出 $R \triangleq T^{-1}T$ 是 X 上的一个等价关系，即 $xRy \Leftrightarrow Tx = Ty(x, y \in X)$. 设 $P:X \to X/R$ 是投影，则 $P^{-1}P = R = T^{-1}T$（用(20)），且易验证

$$\Phi \triangleq TP^{-1}:X/R \to Y, \qquad \tilde{x} \to Tx \tag{21}$$

是一双射. 因此，不妨认为 Y 可替代 X/R 作为 X 的商集. 这一思想将在代数与拓扑结构的层面上加以发挥.

现在转向代数意义上的商结构. 设 X 是一个乘法群（或向量空间、代数），$A \subset X$ 是正规子群（或子空间、双边理想）. 定义

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in A \ (\text{或}\ x - y \in A), \tag{22}$$

则直接看出～是 X 上的等价关系，因而得到商集 $\widetilde{X}$，下面记作 X/A；仍以 P 记投影，令 $\tilde{x} = Px(x \in X)$. 直接由(22)推出：

$$\tilde{x} = xA(\text{或}\ \tilde{x} = x + A), \tag{23}$$

称 xA（或 $x + A$）为**陪集**. 类似于积群的构成，现在的问题是：应如何将 X/A 定义为乘法群，使投影 P 为群同态？P 为同态意味着 $P(xy) = P(x)P(y)$，即

$$\widetilde{xy} = \tilde{x}\tilde{y} \qquad (x, y \in X). \tag{24}$$

式(24)唯一地决定了 X/A 中乘法之定义. 注意到 $\tilde{x} = xA$ 且 A 为正规子群，利用(2)，(5)不难验证，X/A 依(24)所定义的乘法确是一个群，称之为 X 模 A 的**商群**. 类似地，当 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间（或代数）时，X/A 依线性运算

$$\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} = \widetilde{\alpha x + \beta y} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{K}, x, y \in X) \tag{25}$$

（或加上依(24)定义的乘法）是一个 $\mathbf{K}$ 上的向量空间（或代数），称为 X 模 A 的**商空间**（或**商代数**）. 在以上三种情况下，投影 P 都是满同态，且 $\operatorname{Ker} P = A$.

1.2.5 同态定理 设 X, Y 是群（或向量空间、代数），$T:X \to Y$ 是一满同态，$A = \operatorname{Ker} T$，$P:X \to X/A$ 为投影，则依(21)定义的 Φ（取 $X/R = X/A$）是一同构.

证 不妨只考虑 X, Y 是乘法群的情况. 因

$$Tx = Ty \Leftrightarrow T(xy^{-1}) = Tx(Ty)^{-1} = \text{单位元},$$

故 $xy^{-1} \in A \Leftrightarrow (x, y) \in T^{-1}T$，因而 $X/A = X/T^{-1}T$. 已指出 Φ 为双射，令 $\tilde{x} = Px$，$\forall x, y \in X$，有

$$\Phi(\widetilde{xy}) = TP^{-1}\widetilde{xy} = T(xy)$$
$$= Tx \cdot Ty = \Phi\widetilde{x} \cdot \Phi\widetilde{y},$$

故 Φ 是一同构. □

定理 1.2.5 的意义在于,可将 Y 与 $X/\mathrm{Ker}T$ 同等地看作 X 的商群(或商空间、商代数);而在形式上,处理 Y 可能比处理 $X/\mathrm{Ker}\ T$ 更方便.

若 X 是群(或向量空间) $X_i(i \in I)$ 的积群(或积空间),则投影 $P_i: X \to X_i$ 是满同态,因而由定理 1.2.5 得出 X_i 可看作 X 的商群(或商空间). 这就在代数系统的层次上证实了积与商在字面上的互逆关系.

E. 线性几何

设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间. 现在借用通常的几何语言,在 X 中展开某些由纯代数关系界定的概念,它们在抽象空间理论中将起基本作用.

1.2.6 定义 设 $A \subset X$. 若 $\forall \alpha \in [0,1]$, 有

$$(1-\alpha)A + \alpha A \subset A, \tag{26}$$

则称 A 为**凸集**;若条件(26)对任何 $\alpha \in \mathbf{K}$ 满足,则称 A 为**线性流形**;若 A 是线性流形, $A \neq X$ 且 A 与 X 是包含 A 的仅有的线性流形,则称 A 为**超平面**;同时为超平面的子空间称为**超子空间**. 若

$$\forall \alpha \in \mathbf{K}, |\alpha| \leqslant 1 \Rightarrow \alpha A \subset A,$$

则称 A 为**平衡集**;凸平衡集称为**绝对凸集**. 若 $A = -A$, 则称 A 为**对称集**.

设集族 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 满足条件:

(C) $X \in \mathscr{A}; \mathscr{B} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap \mathscr{B} \in \mathscr{A}$,

则对每个 $A \subset X, \hat{A} \triangleq \bigcap \{B: A \subset B \in \mathscr{A}\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中包含 A 的最小集,姑且称为由 A 生成的 $\mathscr{A}$ 集. 注意这是一个纯集论概念,完全不涉及 X 中的特殊结构,因而具有极大的一般性,可用于各个领域.

直接看出,由凸集(或绝对凸集、子空间等)组成的集类满足条件(C),因而每个 $A \subset X$ 生成一个凸集(或绝对凸集、子空间等),称为 A 的**凸包**(或**绝对凸包**、**线性包**等),记作 $\mathrm{co}\ A$ (或 $\mathrm{abco}\ A$, $\mathrm{span}\ A$). 若 $A = \{x_i\} \subset X$ 是有限集,则可直接验证

$$\mathrm{co}\ A = \Big\{ \sum_i t_i x_i : t_i \geqslant 0, \sum_i t_i = 1 \Big\},$$

$$\mathrm{abco}\ A = \Big\{ \sum_i \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbf{K}, \sum_i |\alpha_i| \leqslant 1 \Big\},$$

$$\mathrm{span}\ A = \Big\{ \sum_i \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbf{K} \Big\}.$$

以上三个集中的元分别称为 $\{x_i\}$ 的**凸组合**、**绝对凸组合**与**线性组合**. 一般地,对任何 $A \subset X$, 有

$$\operatorname{co} A = \{x : x \text{ 是 } A \text{ 的有限子集的凸组合}\}. \tag{27}$$

对 abco A 与 span A 有类似的表达式，只要将(27)中的“凸组合”换成“绝对凸组合”或“线性组合”.

任给 $a,b \in X$，令

$$[a,b] = \operatorname{co}\{a,b\} = \{(1-t)a + tb : 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \tag{28}$$

称 $[a,b]$ 为 X 中以 a,b 为端点的**线段**. 对照(26)与(28)看出，A 是凸集 $\Leftrightarrow$ 端点在 A 中的线段必含于 A.

若 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 X 的子空间，每个 $x \in X$ 有唯一分解

$$x = \sum_i x_i, \quad x_i \in A_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{29}$$

则称 X 为 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的**直和**，记作

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n.$$

令 $P_i x = x_i$，x，x_i 依(29)，则 $P_i : X \to A_i$ 显然为线性算子，称为从 X 到 A_i 的**投影**. 当 $X = \bigoplus_i A_i$ 时，

$$\prod_i A_i \to X, \qquad (x_i) \to \sum_i x_i$$

是一个线性同构，因此直和 $\bigoplus_i A_i$ 实质上具有积空间 $\prod A_i$ 的结构.

若 A,B 是 X 的子空间，$X = A + B$，则 $X = A \oplus B$ 的充要条件是 $A \cap B = \{0\}$. 若 $X = A \oplus B$，P,Q 分别为从 X 到 A 与 B 的投影，则 $Q = I - P$(I 是单位算子)，$Q : X \to B$ 是满同态，$N(Q) = A$. 于是由定理 1.2.5 得出：商空间 X/A 与 B 线性同构. 形式上，这一结论可写作

$$(A \times B)/A = B.$$

1.2.7 定理 设 $\varnothing \neq A \subset X$，则以下结论成立：

(i) A 是线性流形 $\Leftrightarrow A = a + B, a \in A, B \subset X$ 是子空间.

(ii) A 是超子空间 $\Leftrightarrow X = A \oplus \mathbf{K}x_0, x_0 \in X \backslash A \Leftrightarrow A$ 是子空间且 X/A 线性同构于 $\mathbf{K} \Leftrightarrow$ 存在 X 上的非零线性泛函 f，使得 $A = f^{-1}(0)$；若不计常系数的差别，这样的 f 是唯一的.

(iii) A 是超平面 $\Leftrightarrow$ 存在 X 上的非零线性泛函 f 与 $\beta \in \mathbf{K}$，使得 $A = f^{-1}(\beta)$.

证 (i) 设 A 是线性流形，任取 $a \in A$，则易验证 $B \triangleq A - a$ 是 X 的子空间，$A = a + B$. 逆命题是明显的.

(ii) 若 A 是超子空间，任取 $x_0 \in X \backslash A$，则显然有 $X = A \oplus \mathbf{K}x_0$. 由 $X = A \oplus \mathbf{K}x_0$ 推出 $X/A \cong \mathbf{K}x_0 \cong \mathbf{K}$ ($\cong$记线性同构，下同). 若 $T : X/A \cong \mathbf{K}$，$P : X \to X/A$ 是投影，则 $f \triangleq TP$ 是 X 上的非零线性泛函，$f^{-1}(0) = P^{-1}T^{-1}(0) =$

A. 若 f 是 X 上的非零线性泛函，使 $A = f^{-1}(0)$，Y 是 X 的子空间，$A \subsetneqq Y$，则有 $x_0 \in Y$，使 $f(x_0) \neq 0$. 于是 $\forall x \in X$，有

$$x = \left[x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right] + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in A + \mathbf{K}x_0 \subset Y,$$

这推出 $Y = X$，因而 A 是超子空间. 若另有线性泛函 g 使 $A = g^{-1}(0)$，则 $\forall x \in X$，有 $g(x_0)x - g(x)x_0 \in A$，于是

$$f(x) = f\left(\frac{g(x)}{g(x_0)}x_0\right) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}g(x) \qquad (\forall x \in X),$$

这表明 $f = \mathrm{const}g$.

(iii) 直接由 (ii) 推出. □

§1.3 拓扑结构

本节给出拓扑结构的几种主要的等价刻画，并用这些刻画来描述连续映射.

A. 拓扑与拓扑基

力图将极限与连续性概念一般化，乃是导向拓扑结构的动因. 设 X 是一个非空集，$x, x_n \in X (n \in \mathbf{N})$. 已有的经验提示，$x_n \to x$ 应意味着 x_n 最终进入 x 的任给邻域，至少在平常的空间中，x 的邻域可取作含 x 的开集. 这就表明，极限概念的一般化，可借助于开集概念的一般化. 这一途径初看起来显得有点迂廻，但事实证明它在逻辑上是最简单的.

1.3.1 定义 设 X 是一非空集. 若一集族 $\tau \subset 2^X$ 满足如下**开集公理**：

(O_1) $\forall \mathscr{A} \subset \tau$，有 $\mathscr{A}^\cup \in \tau$；

(O_2) $\forall A, B \in \tau$，有 $A \cap B \in \tau$；

(O_3) $X, \varnothing \in \tau$，

则称 τ 为 X 上的一个**拓扑**，称 (X, τ)（或就称 X）为**拓扑空间**，称每个 $A \in \tau$ 为**开集**，当 $A^c \in \tau$ 时称 A 为**闭集**.

将一集 X **拓扑化**，意味着在其上赋予某个拓扑 τ.

鉴于开集与闭集的互补性质，所有用开集表达的概念与结构，都可等价地用闭集来表达. 例如，开集公理等价于如下**闭集公理**：

(C_1) 任一族闭集之交为闭集；

(C_2) 有限个闭集之并为闭集；

(C_3) X 与 $\varnothing$ 是闭集.

因此，在 X 上给定满足 $(\mathrm{C}_1) \sim (\mathrm{C}_3)$ 的闭集族，与拓扑化 X 相当.

若 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 对取补与可数并运算封闭，$X\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 **σ-代数**. 任给 $\mathscr{B}\subset 2^X$，以 $\sigma(\mathscr{B})$ 记 X 上包含 $\mathscr{B}$ 的最小 σ-代数，称为 $\mathscr{B}$ 生成的 σ-代数（参看§1.2E）. 若 (X,τ) 是拓扑空间，则 $\sigma(\tau)$ 是 X 上的一个 σ-代数，其中的集称为 **Borel 集**. Borel 集包括所有开集、闭集、G_δ 集（即可数个开集的交集）与 F_σ 集（即可数个闭集的并集），但还可能含其他的集.

通常，拓扑 τ 是一个很大的集族，并不便于描述与运用. 我们希望利用 τ 的某个较小的子族来表出 τ，这就导致拓扑基概念. 顺便指出，运用某种形式的基来描述空间结构，是抽象空间理论中普遍使用的方法.

1.3.2 定义　设 (X,τ) 是一个拓扑空间，$\mathscr{B}\subset\tau$. 若每个 $A\in\tau$ 是 $\mathscr{B}$ 中某些集之并，则称 $\mathscr{B}$ 为 τ 的**基**或 X 的**拓扑基**. 若 $\mathscr{B}^*$（依§1.1(2)）是 τ 的基，则称 $\mathscr{B}$ 为 τ 的**子基**或 X 的**拓扑子基**.

若 $\mathscr{B}$ 是拓扑 τ 的子基，则 τ 是包含 $\mathscr{B}$ 的最小拓扑，因而称为由 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑. 为方便起见，今后将运用**基开集**、**子基开集**这类术语. 说 B 是基开集（或子基开集），意指它属于某个拓扑基（或拓扑子基）$\mathscr{B}$，此 $\mathscr{B}$ 不必或不便明确写出.

1.3.3 命题　对于 $\mathscr{B}\subset 2^X$ 给定条件：

(i) $\mathscr{B}^{\cup}=X$；

(ii) $\forall A,B\in\mathscr{B},\forall x\in A\cap B,\exists C\in\mathscr{B}:x\in C\subset A\cap B$.

若 $\mathscr{B}$ 满足条件(i)，则 $\mathscr{B}$ 是 X 上某个拓扑的子基；若 $\mathscr{B}$ 满足条件(i)与(ii)，则 $\mathscr{B}$ 是 X 上某个拓扑的基.

证　首先设 $\mathscr{B}$ 满足条件(i)与(ii)，令

$$\tau=\{A:存在\ \mathscr{A}\subset\mathscr{B}\ 使\ A=\mathscr{A}^{\cup}\},$$

则 τ 显然满足开集公理(O_1)，(O_3). 由条件(ii)推出：$A,B\in\mathscr{B}\Rightarrow A\cap B\in\tau$. 这显然又推出 τ 满足开集公理(O_2). 因此 τ 是一个拓扑，它显然以 $\mathscr{B}$ 为其基.

其次，若 $\mathscr{B}$ 仅满足条件(i)，则 $\mathscr{B}^*$ 必满足条件(i)，(ii)，因而是某个拓扑的基，于是 $\mathscr{B}$ 是拓扑子基. □

很多用开集表述的拓扑命题，可用基开集（甚至子基开集）等价地表述，而这就达到了一定的简化. 选取的拓扑基（或子基）愈小，带来的简化就愈明显. 因此，存在可数拓扑基（$\Leftrightarrow$ 存在可数拓扑子基）的拓扑空间必定有良好的性质，这种空间称为满足第二可数性公理的空间，或简称为**第二可数空间**. 以下简单命题是常用的.

1.3.4 命题　设 X 是第二可数空间，$\mathscr{A}$ 是 X 的任一拓扑基，则 $\mathscr{A}$ 必包含 X 的可数拓扑基.

证　取 X 的可数拓扑基 $\{B_n\}$. $\forall n\in\mathbf{N},\forall x\in B_n$，有 $A\in\mathscr{A}$，使 $x\in A\subset B_n$；又有 $m\in N$，使 $x\in B_m\subset A$. 以 I 记如上的 (m,n) 之全体，对每个 $(m,n)\in I$，取定 $A_{mn}\in\mathscr{A}$，使 $B_m\subset A_{mn}\subset B_n$，则易验证 $\{A_{mn}:(m,n)\in I\}$

是 X 的拓扑基. □

考虑一些解释性的例子.

1.3.5 例 (i) 任给非空集 X, 令 $\tau_s = 2^X$, $\tau_w = \{X, \varnothing\}$. τ_s 与 τ_w 都平凡地满足开集公理,它们是 X 上的最大拓扑与最小拓扑,分别称为**离散拓扑**与**平凡拓扑**. 若 $\mathscr{B}$ 是 τ_s 的基,则 $\mathscr{B}$ 必包含 X 中所有单点集. 因此, (X, τ_s) 不是第二可数空间,除非 X 是可数集.

(ii) 令 $\mathscr{B} = \{(-\infty, a), (a, \infty) : a \in \mathbf{R}\}$. 由命题 1.3.3,以 $\mathscr{B}$ 为拓扑子基在 $\mathbf{R}$ 上生成一个拓扑 τ, 称之为**通常拓扑**. 显然 $\mathscr{B}^*$ 就是开区间之全体,故 τ 由通常意义下的一维开集组成. 若在构成 $\mathscr{B}$ 时限定 $a \in \mathbf{Q}$, 则 $\mathscr{B}$ 是 τ 的一个可数子基,因此 $(\mathbf{R}, \tau)$ 是第二可数的.

(iii) 给定拓扑空间 (X, τ) 与 (Y, τ_1), 可验证以

$$\mathscr{B} = \{A \times B : A \in \tau, B \in \tau_1\}$$

为拓扑基在 $X \times Y$ 上生成一拓扑,称为**积拓扑**. 类似地,可定义任何有限个拓扑空间 X_i 的积 $\prod X_i$ 上的积拓扑. 未加说明时,在 $\prod X_i$ 上总使用积拓扑. 当 $\mathbf{R}$ 上采用通常拓扑时, $\mathbf{R}^n$ 中的积拓扑称为通常拓扑, $\mathbf{R}^2$ 中的通常拓扑等同于 $\mathbf{C}$ 中的通常拓扑. 未加说明时,在 $\mathbf{K}(= \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C})$ 及 $\mathbf{K}^n$ 中总采用通常拓扑.

B. 邻域

设 (X, τ) 是给定的拓扑空间.

1.3.6 定义 (i) 任给 $x \in X$, 令

$$\mathscr{N}_x = \{N \subset X : \exists A \in \tau, 使 x \in A \subset N\},$$

称 $\mathscr{N}_x$ 为 x 的**邻域系**,称每个 $N \in \mathscr{N}_x$ 为 x 的**邻域**.

(ii) 设 $x \in X$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{N}_x$. 若 $\mathscr{B} \vdash \mathscr{N}_x$, 则称 $\mathscr{B}$ 为 x 的一个**邻域基**;若 $\mathscr{B}^*$ 是 x 的邻域基,则称 $\mathscr{B}$ 为 x 的**邻域子基**.

(iii) 若每个 $x \in X$ 有可数邻域基,则说 X 满足第一可数性公理,或简称 X 为**第一可数空间**.

不难验证,每个邻域系 $\mathscr{N}_x$ 都是一个滤子,称为 x 的**邻域滤子**,而邻域基(子基)正是定义 1.1.1 意义下的滤基(子滤基). 类似于基(子基)开集,也经常使用基(子基)邻域这样的术语,这意味着某个取定的邻域基(子基)中的集.

邻域基与拓扑基有密切联系:若 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基(或子基),则 $\mathscr{B}_x \triangleq \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$ $(x \in X)$ 必为 x 的邻域基(或子基). 反之,若 $\forall x \in X$, $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基(或子基),且 $\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}_x \subset \tau$, 则 $\mathscr{B}$ 必为 X 的拓扑基(或子基). 由以上结论又推出:第二可数空间必为第一可数空间.

以下结果可以与 1.3.3 相对照.

1.3.7 定理 设 $\forall x \in X, \mathscr{B}_x \subset 2^X$. 给定以下条件:

(i) $\forall x \in X$, 有 $x \in \bigcap \mathscr{B}_x$;

(ii) $\forall x \in X, \forall A, B \in \mathscr{B}_x$, 有 $\mathscr{B}_x \vdash A \cap B$;

(iii) $\forall x \in X, \forall A \in \mathscr{B}_x, \exists B \in \mathscr{B}_x, \forall y \in B$, 有 $\mathscr{B}_y \vdash A$;

(iv) $\forall x \in X, \forall A \in \mathscr{B}_x, \exists B \in \mathscr{B}_x^*, \forall y \in B$, 有 $\mathscr{B}_y^* \vdash A$.

若 $\{\mathscr{B}_x\}$ 满足条件(i)~(iii),则 X 上存在唯一拓扑,使每个 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基;若 $\{\mathscr{B}_x\}$ 满足条件(i),(iv),则 X 上存在唯一拓扑,使每个 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域子基.

证 若 $\{\mathscr{B}_x\}$ 满足条件(i),(iv),则 $\{\mathscr{B}_x^*\}$ 必满足条件(i)~(iii). 故只需考虑 $\{\mathscr{B}_x\}$ 满足条件(i)~(iii)的情况. 令

$$\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \text{有 } \mathscr{B}_x \vdash A\},$$

τ 显然满足开集公理$(O_1)(O_3)$. 若 $A, B \in \tau, x \in A \cap B$, 则 $\mathscr{B}_x \vdash A, \mathscr{B}_x \vdash B$, 这结合条件(ii)推出 $\mathscr{B}_x \vdash A \cap B$, 因而 $A \cap B \in \tau$, 开集公理(O_2)满足. 故 τ 是一个拓扑.

下面证 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基. 首先证 $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{N}_x$. 任给 $A \in \mathscr{B}_x$, 令 $V = \{y \in A : \mathscr{B}_y \vdash A\}$, 则 $x \in V \subset A$. 今证 $V \in \tau$(由此推出 $A \in \mathscr{N}_x$, 参看 1.3.6). $\forall y \in V$, 取 $E \in \mathscr{B}_y$, 使 $E \subset A$, 依条件(iii),有 $B \in \mathscr{B}_y, \forall z \in B : \mathscr{B}_z \vdash E$, 这推出 $B \subset V$, 从而 $V \in \tau$. 其次证 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基. 设 $x \in A \in \tau$, 则 $\mathscr{B}_x \vdash A$, 这正说明 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基. □

定理 1.3.7 表明,一个拓扑可由其各点的邻域基完全地刻画. 邻域基的好处是它有明显的局部特征,在研究拓扑空间的局部性质时使用邻域基有很大的方便.

C. 极限

为给极限概念一个一般的描述,需要推广序列概念.

设 $(T, \leqslant)$ 是一拟序集. 若 $\forall s, t \in T, \exists r \in T$, 使得 $s \leqslant r, t \leqslant r$, 则称 T 为**有向集**. 设 T 是一有向集, X 是任一非空集,则任何映射 $x : T \to X$ 称为 X 中的**网**或**有向列**,记作 $\{x_t : t \in T\}$ 或 $\{x_t\}$, 其中 $x_t = x(t)(t \in T)$. 今后给出一个网 $\{x_t\} \subset X$ 时,总意味着下标 t 取自某个有向集 T, 通常不必明确写出 T. 若 $\{x_t : t \in T\}$ 与 $\{t_\delta : \delta \in \Delta\} \subset T$ 是两个网, $\forall t \in T, \exists \delta_0 \in \Delta, \forall \delta \geqslant \delta_0$, 有 $t_\delta \geqslant t$, 则称 $\{x_{t_\delta}\}$ 为 $\{x_t\}$ 的一个**子网**,当 $\Delta \subset T, t_\delta = \delta$ 时称 $\{x_{t_\delta}\}$ 为 $\{x_t\}$ 的**共尾子网**. 子网正是子列概念的推广. 若 $(S, \leqslant)$ 与 $(T, \leqslant)$ 是两个有向集,则 $S \times T$ 依拟序 $(s,t) \leqslant (s',t') \Leftrightarrow s \leqslant s', t \leqslant t'$ 为有向集,因而任何映射

$$x : S \times T \to X, \qquad (s,t) \to x_{st}$$

都是网. 网 $\{x_{st}\}$ 可看作二重序列的推广.

作了上述准备之后，现在已可描述拓扑空间中的极限. 设 (X,τ) 是给定的拓扑空间.

1.3.8 定义 设 $\{x_t\}\subset X$ 是一个网，$x\in X$. 若

$$\forall N\in\mathscr{N}_x,\exists t_0,\forall t\geqslant t_0,\text{有 } x_t\in N, \tag{1}$$

则说网 $\{x_t\}$ 收敛于极限 x，记作 $x_t\to x$.

定义 1.3.8 所描述的收敛最先由 Moore-Smith 所考虑，通常称为 Moore-Smith 收敛. 注意条件(1)中的 $\mathscr{N}_x$ 可代以任何邻域基或邻域子基 $\mathscr{B}_x$，这一替换并不实质上减弱条件(1)，但往往能大大简化收敛判别. 代替使用由式子表达的条件(1)，常常也使用如下通行的说法：$x_t\to x$ 意味着 x_t **最终**进入 x 的每个邻域.

由极限与子网的定义直接看出：若 $x_t\to x$，则 $\{x_t\}$ 的任何子网亦收敛于 x. 但如不对空间作出进一步的假定，对 Moore-Smith 收敛能得出的结论已不多. 通常认为理所当然地成立的极限唯一性，在一般拓扑空间中就未必成立.

1.3.9 定理 X 中任何收敛网有唯一极限的充要条件是：

(T_2) $\forall x,y\in X,x\neq y\Rightarrow\exists U\in\mathscr{N}_x,V\in\mathscr{N}_y:U\cap V=\varnothing$.

证 条件(T_2)显然是充分的，今证其必要性. 若条件(T_2)不满足，则有 $x,y\in X,x\neq y,\forall U\in\mathscr{N}_x,V\in\mathscr{N}_y$，存在 $x_{UV}\in U\cap V$. $\mathscr{N}_x$ 与 $\mathscr{N}_y$ 以包含$\supset$为序(这意味着 $U\leqslant V\Leftrightarrow U\supset V$)皆为有向集，因此

$$\{x_{UV}:U\in\mathscr{N}_x,V\in\mathscr{N}_y\}$$

是 X 中的网. 任给 $W\in\mathscr{N}_x$，当 $U\in\mathscr{N}_x,U\subset W,V\in\mathscr{N}_y$ 时恒有 $x_{UV}\in U\cap V\subset W$，这表明 $x_{UV}\to x$. 同理 $x_{UV}\to y$，可见极限不具唯一性. □

凡满足条件(T_2)的拓扑空间称为 ***T*₂ 空 间**或 Hausdorff 空间. 于是定理 1.3.9 表明，只有在 T_2 空间中，才保证收敛网有唯一极限，只有在这种情况下，使用记号 $\lim\limits_t x_t=x$ 才是适当的.

在 1.3.9 之证中，网 $\{x_{UV}\}$ 的构成初看起来颇为新奇，但实际上是简单而自然的. 一般地，若 $\mathscr{B}$ 是 $x\in X$ 的邻域基，$\forall B\in\mathscr{B}$，取 $x_B\in B$，$\mathscr{B}$ 以包含$\supset$为序，则 $\{x_B\}$ 就是一个网，直接看出它收敛于 x. 特别，若 $\forall V\in\mathscr{N}_x$，取 $x_V\in V$，则必 $x_V\to x$. 这些事实今后将直接使用而不再详细解释.

D. 内部与闭包

1.3.10 定义 设 (X,τ) 是一拓扑空间，$A\subset X$. 令

$$A^\circ=\{x\in X:A\in\mathscr{N}_x\}; \tag{2}$$

$$\overline{A}=\{x\in X:\forall U\in\mathscr{N}_x,A\cap U\neq\varnothing\}; \tag{3}$$

$$\partial A=\overline{A}\backslash A^\circ; \tag{4}$$

$$A'=\{x\in X:x\in\overline{A\backslash\{x\}}\}, \tag{5}$$

以上四个集依次称为集 A 的**内部**、**闭包**、**边界**与**导集**，$A^\circ, \bar{A}, \partial A$ 与 A' 中的点分别称为 A 的内点、触点、边界点与聚点.

像内部与边界这类有明显几何色彩的用语，我们从直觉经验中已获得的具体印象无疑有助于对它们的理解. 不过，从概念的逻辑运用来说，我们宁可将对应 $A \to A^\circ$ 看作一种运算或算子(所谓内部算子). 类似地可考虑闭包算子 $A \to \bar{A}$ 及边界算子 $A \to \partial A$ 等. 若能充分利用这些算子所服从的形式规则，就能有效地将一些拓扑论证归结为一系列演算.

利用(2)～(5)容易建立以下关系式:

$$\bar{A} = A^{c\circ c}, \qquad A^\circ = (\overline{A^c})^c; \tag{6}$$

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}, \qquad \bar{A} = A \cup \partial A = A \cup A'. \tag{7}$$

这些公式表明，内部、闭包、边界与导集中任何一个都足以表出其他三个，因而它们对于刻画拓扑的作用是等价的. 不过就方便与常用而言，闭包或许是最重要的，下面就来着重考察它.

1.3.11 定理 (i) 设 (X, τ) 是一拓扑空间，$A, B \subset X$，则

$$\begin{cases} \bar{\varnothing} = \varnothing, & A \subset \bar{A}, \\ \bar{\bar{A}} = \bar{A}, & \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bigcap \{F : A \subset F \in \mathscr{F}\} \\ &= \{x : 存在网 \{x_\iota\} \subset A 使 x_\iota \to x\}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\mathscr{F}$ 记 X 中的闭集族，$A \in \mathscr{F} \Leftrightarrow A = \bar{A}$. 若 X 是第一可数空间，则 $x \in \bar{A}$ $\Leftrightarrow$ 存在序列 $\{x_n\} \subset A$ 使 $x_n \to x$.

(ii) 设 X 是一非空集，其中定义了算子 $A \to \bar{A}$ (记号 $\bar{A}$ 暂不看作闭包)，使得条件(8)(称为 Kuratowski 闭包公理)满足，则 X 上存在唯一拓扑 τ，使 $\bar{A}$ 恰为 A 的闭包.

证 (i) 直接看出 $\bar{\varnothing} = \varnothing, A \subset \bar{A}, \bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$. 若 $x \in \bar{\bar{A}}, x \in U \in \tau$，则存在 $y \in \bar{A} \cap U$. 由 $U \in \mathscr{N}_y$ 又有 $A \cap U \neq \varnothing$，故 $x \in \bar{A}$，这证得 $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$. 易见 $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. 若 $x \overline{\in} \bar{A} \cup \bar{B}$，则有 $U, V \in \mathscr{N}_x$，使 $A \cap U = \varnothing = B \cap V$. 因 $W \triangleq U \cap V \in \mathscr{N}_x$ 而 $W \cap (A \cup B) = \varnothing$，故 $x \overline{\in} \overline{A \cup B}$. 因此 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$，(8)得证.

若 A 是闭集，$x \in A^c$，则 $A^c \in \mathscr{N}_x, A^c \cap A = \varnothing$. 故由(3)知 $x \overline{\in} \bar{A}$，因此 $\bar{A} \subset A$，这与 $A \subset \bar{A}$ 一起得 $A = \bar{A}$. 反之，若 $A = \bar{A}$，则 $\forall x \in A^c$，有 $x \overline{\in} \bar{A}$，因而有 x 的开邻域 V，使 $A \cap V = \varnothing$，从而 $x \in V \subset A^c$，这表明 A^c 可表为开集之并. 故 $A^c \in \tau, A$ 是闭集. 因此证得 A 为闭集 $\Leftrightarrow A = \bar{A}$. 于是由 $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$ 推出 $\bar{A}$ 是闭集，用此立即推出等式(9).

若有网 $\{x_\iota\} \subset A$ 使 $x_\iota \to x$，则由(3)显然有 $x \in \bar{A}$. 反之，若 $x \in \bar{A}$，则

$\forall U \in \mathcal{N}_x$，$\exists x_U \in A \cap U$，$\{x_U\} \subset A$ 是一个网，显然 $x_U \to x$（参照1.3.9之证）. 若 X 是第一可数的，$x \in \bar{A}$，取 x 的可数邻域基 $\{U_n\}$. 可设 $\{U_n\}$ 是递降的（否则以 $\bigcap_1^n U_i$ 替代 U_n），取 $x_n \in A \cap U_n$. 则显然有 $x_n \to x(n \to \infty)$.

(ii) 令 $\mathcal{F} = \{A \subset X : \bar{A} = A\}$，则由条件(8)推出 $X, \varnothing \in \mathcal{F}$，$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$. 若 $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{F}$，$A = \bigcap A_i$，则 $\bar{A} \subset \bar{A}_i = A_i$，故 $\bar{A} \subset A$，从而 $A = \bar{A} \in \mathcal{F}$. 因此 $\tau = \{A : A^c \in \mathcal{F}\}$ 是 X 上的拓扑，$\mathcal{F}$ 恰为其闭集族. 由 $\mathcal{F}$ 的定义及式(9)推出 $\bar{A}$ 就是 A 的闭包. □

从定理1.3.11得出以下结论：

(i) 闭包(因而内部)完全刻画了空间的拓扑结构.

(ii) "网收敛"完全刻画了闭包，因而亦完全刻画了拓扑结构.

(iii) 第一可数空间的拓扑结构完全由序列收敛刻画.

若 $\bar{A} = X$，则称 A 为 X 的**稠子集**，或说集 A 在 X 中**稠密**. 由定理1.3.11，$A \subset X$ 是稠集⇔每个 $x \in X$ 是 A 中某个网的极限. 若 X 是第一可数空间，则 A 是稠集⇔每个 $x \in X$ 是 A 中某序列的极限.

利用闭包与内部之间的对偶关系（见式(6)），对于内部可写出一个与1.3.11恰相对应的结果. 例如，与(8)，(9)相对应，有

$$\begin{cases} X^\circ = X, & A^\circ \subset A, \\ A^\circ = A^{\circ\circ}, & (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ. \end{cases} \tag{10}$$

$$A^\circ = \bigcup \{V : A \supset V \in \tau\}. \tag{11}$$

其次，A 是开集 ⇔ $A = A^\circ$.

E. 映射

设 (X, τ) 与 (Y, τ_1) 是两个拓扑空间，分别以 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}_1$ 记 X 与 Y 中的闭集族，如前面一样，$\mathcal{N}_x$ 表点 x 的邻域系.

1.3.12 定义 设 $F: X \to Y$.

(i) 设 $x \in X$. 若 $F\mathcal{N}_x \vdash \mathcal{N}_{Fx}$，即

$$\forall V \in \mathcal{N}_{Fx}, \exists U \in \mathcal{N}_x : FU \subset V, \tag{12}$$

则说 F 在 x 连续. 若 F 在每点 $x \in X$ 连续，则称 F 为从 X 到 Y 的**连续映射**. 以 $C(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的连续映射之全体，令

$$C(X) = C(X, \mathbf{K}), \mathbf{K} = \mathbf{R} \text{ 或 } \mathbf{C}.$$

(ii) 若 $F \in C(X,Y)$ 是双射且 $F^{-1} \in C(Y,X)$，则称 F 为从 X 到 Y 的**同胚或拓扑变换**. 当这样的 F 存在时，说 X 与 Y 是互相同胚的拓扑空间.

(iii) 若 $F\tau \subset \tau_1$，则称 F 为**开映射**；若 $F\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$，则称 F 为**闭映射**. 注意 $F\mathcal{F} = \{FA : A \in \mathcal{F}\}$.

下面分别给出连续映射、开映射与闭映射的各种刻画，重点考虑连续

映射.

1.3.13 定理　对一映射 $F:X \to Y$，以下条件互相等价：

(i) $F \in C(X,Y)$；

(ii) $\forall x \in X, y = Fx$，存在 y 的邻域子基 $\mathscr{B}_y$，使 $F^{-1}\mathscr{N}_y \vdash \mathscr{B}_y, \mathscr{N}_x$ 可代以 x 的某个邻域基；

(iii) 若在 X 中 $x_t \to x$，则 $Fx_t \to Fx$，当 X 是第一可数空间时只要考虑序列；

(iv) $F^{-1}\tau_1 \subset \tau (\Leftrightarrow F^{-1}\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F})$；

(v) 对 Y 的某个拓扑子基 $\mathscr{B}$，有 $F^{-1}\mathscr{B} \subset \tau$；

(vi) $\forall B \subset Y$，有 $F^{-1}B^\circ \subset (F^{-1}B)^\circ$；

(vii) $\forall B \subset Y$，有 $F^{-1}\bar{B} \supset \overline{F^{-1}B}$；

(viii) $\forall A \subset X$，有 $F\bar{A} \subset \overline{FA}$.

证　(i)⇒(ii)是平凡的.

(ii)⇒(iii). 设在 X 中 $x_t \to x, Fx = y, \mathscr{B}_y$ 依条件(ii). $\forall V \in \mathscr{B}_y$，由条件(ii)有 $F^{-1}V \in \mathscr{N}_x$，故 x_t 最终进入 $F^{-1}V$，从而 Fx_t 最终进入 V. 故 $Fx_t \to Fx$.

(iii)⇒(iv). 显然 $F^{-1}\tau_1 \subset \tau \Leftrightarrow F^{-1}\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}$. 若 $B \in \mathscr{F}_1, \{x_t\} \subset F^{-1}B, x_t \to x$，则由条件(iii)有 $Fx_t \to Fx \in B$. 因而 $x \in F^{-1}B$，故 $F^{-1}B \in \mathscr{F}$.

(iv)⇒(v)是平凡的.

(v)⇒(vi). 设 $\mathscr{B}$ 如条件(v)，$x \in F^{-1}B^\circ$. 由 $Fx \in B^\circ$ 推出有有限族 $\{B_i\} \subset \mathscr{B}$，使 $Fx \in \bigcap B_i \subset B^\circ$，因而

$$x \in F^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap F^{-1}B_i \subset F^{-1}B^\circ \subset F^{-1}B.$$

因 $\bigcap F^{-1}B_i \in \tau$，故 $x \in (F^{-1}B)^\circ$.

(vi)⇒(vii)由式(6)得出.

(vii)⇒(viii). 任给 $A \subset X$，用条件(vii)与§1.1(16)推出：

$$F\bar{A} \subset F\overline{F^{-1}FA} \subset FF^{-1}\overline{FA} \subset \overline{FA}.$$

(viii)⇒(i). 若 $x \in X, y = Fx, V \in \mathscr{N}_y$，令 $U = F^{-1}V$，则 $FU \subset V$. 其次，

$$\begin{aligned} x \in F^{-1}V^\circ &= F^{-1}(\overline{V^c})^c \qquad (\text{用}(6)) \\ &= (F^{-1}\overline{V^c})^c \subset (F^{-1}\overline{FF^{-1}V^c})^c \\ &= (F^{-1}\overline{FU^c})^c \subset (F^{-1}F\overline{U^c})^c \qquad (\text{用}(viii)) \\ &\subset (\overline{U^c})^c = U^\circ, \end{aligned}$$

这表明 $U \in \mathscr{N}_x$. 故 F 在 x 连续.　□

对于开映射与闭映射，只写出类似的等价条件而略去其证明.

1.3.14 命题　对于 $F:X \to Y$，以下条件互相等价：

(i) F 是开映射；

(ii) 对于 X 的某个拓扑基 $\mathscr{B}$,有 $F\mathscr{B}\subset\tau_1$;

(iii) $\forall x\in X$, 有 $F\mathscr{N}_x\subset\mathscr{N}_{Fx}$;

(iv) $\forall x\in X$, 有 x 的邻域基 $\mathscr{B}_x$, 使 $F\mathscr{B}_x\subset\mathscr{N}_{Fx}$;

(v) $\forall A\subset X$, 有 $FA^\circ\subset(FA)^\circ$;

(vi) $\forall B\subset Y$, 有 $F^{-1}B^\circ\supset(F^{-1}B)^\circ$;

(vii) $\forall B\subset Y$, 有 $F^{-1}\overline{B}\subset\overline{F^{-1}B}$.

1.3.15 命题 $F:X\to Y$ 是闭映射 $\Leftrightarrow\forall A\subset X$, 有 $F\overline{A}\supset\overline{FA}$.

综合 1.3.13～1.3.15,可得出以下推论:

1.3.16 推论 设 $F:X\to Y$ 是一映射.

(i) 若 F 是连续开映射,则对任给 $B\subset Y$ 有

$$F^{-1}B^\circ=(F^{-1}B)^\circ,\qquad F^{-1}\overline{B}=\overline{F^{-1}B}.\tag{13}$$

若 F 是连续开满射,则 $F\tau=\tau_1$,$F\mathscr{N}_x=\mathscr{N}_{Fx}$,$F$ 将 x 的邻域基映为 Fx 的邻域基 ($\forall x\in X$).

(ii) 若 F 是连续闭映射,则 $\forall A\subset X$, 有 $F\overline{A}=\overline{FA}$; 若 F 是连续闭满射,则 $F\mathscr{F}=\mathscr{F}_1$.

(iii) 若 F 是双射,则 F 连续 $\Leftrightarrow F^{-1}$ 是开(或闭)映射;若 F 是同胚,则 F 保持所有的拓扑关系,例如,

$$FA^\circ=(FA)^\circ,F\overline{A}=\overline{FA},F\mathscr{N}_x=\mathscr{N}_{Fx},x_t\to x\Leftrightarrow Fx_t\to Fx,$$

等等.

(iv) 若 $X=\bigcup U_\alpha$,$\{U_\alpha\}$ 是开集族(或有限闭集族), $F\mid U_\alpha$ 皆连续,则 F 连续.

(v) $f:X\to\mathbf{R}$ 连续的充要条件是: $\forall r\in\mathbf{R}$,$\{f<r\}$ 与 $\{f>r\}$ 是开集 ($\Leftrightarrow\{f\leqslant r\}$ 与 $\{f\geqslant r\}$ 是闭集).

唯一要说明的是(iv):在所给条件下,任给开集(或闭集) $B\subset Y$,

$$F^{-1}B=\bigcup_\alpha(F\mid U_\alpha)^{-1}B$$

是 X 中的开(或闭)集,因而 F 连续.

§1.4 抽象空间

在§1.3 中我们已经看到,拓扑空间概念成功地为极限与连续性提供了一个一般框架. 然而,完全缺乏某种具体构造的拓扑无疑是难以处理的,而且,拓扑结构也过于单纯,难以形成一个足够丰富的理论. 因此,一个更有价值的理论自然要求拓扑结构与其他结构结合起来. 这就导致考虑一致空间、度量空间、拓扑向量空间等,这些空间与拓扑空间一起构成抽象空间的主体,它们正是本书要系统介绍的. 不过,在逐一深入讨论之前,不妨让我们初步交代若干

基本定义.这有助于你对本书的论题一开始就有一个较整体的(尽管是粗浅的)印象.

A. 一致空间

一致空间是 A. Weil 于 1937 年引进的. 就逻辑形式而言,一致空间的定义与拓扑空间定义颇相类似:它也是由一特定的集族来描述.

1.4.1 定义　设 X 是一非空集, $\mathscr{U} \subset 2^{X \times X}$ 满足以下公理:

(U_1) $\mathscr{U}$ 是 $X \times X$ 上的一个滤子(参看 1.1.1);

(U_2) $\Delta = \bigcap \mathscr{U}, \Delta = \Delta_X$ 是对角线;

(U_3) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$;

(U_4) $\forall U \in \mathscr{U}, \exists V \in \mathscr{U}: V \circ V \subset U$,

则称 $\mathscr{U}$ 为 X 上的一个**一致结构**,称 X 或 $(X, \mathscr{U})$ 为**一致空间**,称 $\mathscr{U}$ 的任何滤基(或子滤基)为 $\mathscr{U}$ 的基(或子基).

将公理(U_2)减弱为

(U'_2): $\Delta \subset \bigcap \mathscr{U}$,

其实并不严重影响一致空间理论的展开. 不过,应用上重要的一致空间都满足(U_2). 因此我们宁愿在偶尔需要用到仅满足(U'_2)这种情况时,采用"非分离一致结构"这一名称.

若 $\mathscr{U}$ 是一致结构, $U, V \in \mathscr{U}, V \circ V \subset U$, 则 $W = U \cap U^{-1} = W^{-1} \in \mathscr{U}$, $V = V \circ \Delta \subset V \circ V \Rightarrow V \circ V \in \mathscr{U}$. 这表明 $\{W \in \mathscr{U}: W = W^{-1}\}$ 与 $\{V \circ V: V \in \mathscr{U}\}$ 都是 $\mathscr{U}$ 的基,这一基本事实是重要而常用的,今后将反复使用而不再解释.

容易注意到一致结构的基(子基)正好与拓扑基(拓扑子基)相当. 以下结果与 1.3.3 相当,其证明是直接的.

1.4.2 命题　设 $\mathscr{B} \subset 2^{X \times X}$, 给定以下条件:

(i) $\forall A, B \in \mathscr{B}$, 有 $\mathscr{B} \vdash A \cap B$;

(ii) $\Delta = \bigcap \mathscr{B}$;

(iii) $\forall B \in \mathscr{B}$, 有 $\mathscr{B} \vdash B^{-1}$;

(iv) $\forall B \in \mathscr{B}, \exists A \in \mathscr{B}$, 使 $A \circ A \subset B$.

若 $\mathscr{B}$ 满足条件(ii)~(iv),则 $\mathscr{B}$ 是 X 上某个一致结构 $\mathscr{U}$ 的子基(此时说 $\mathscr{U}$ 由 $\mathscr{B}$ 生成). $\mathscr{B}$ 是一致结构的基 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{B}$ 满足条件(i)~(iv).

设 $(X, \mathscr{U})$ 是一个一致空间. 公理(U_2)意味着

$$x = y \Leftrightarrow \forall U \in \mathscr{U}, \text{有}(x, y) \in U (x, y \in X).$$

因此可以说, $U \in \mathscr{U}$ 愈小,满足 $(x, y) \in U$ 的 x 与 y 就愈接近. 这样, $\mathscr{U}$ 给出了刻画空间 X 中两点接近程度的一系列尺度. 若 $y \in U(x)$ (记号依 §1.1(7)),

则可以说 y 与 x 为"U 阶接近". 这就自然提出以

$$\mathcal{N}_x = \{U(x): U \in \mathcal{U}\} \qquad (x \in X) \tag{1}$$

作为邻域系导入拓扑的问题. 在 3.1.1 中将严格证明,在 X 上存在唯一拓扑 τ,使得由式(1)表达的 $\mathcal{N}_x$ 恰为 x 的邻域系. 这样的 τ 称为由一致结构 $\mathcal{U}$ 生成的**一致拓扑**,当将一致空间同时看作拓扑空间时,总认定其中采用一致拓扑.

设 $(X,\mathcal{U})$ 与 $(Y,\mathcal{V})$ 是两个一致空间,$F: X \to Y$,积映射 $F\times F$ 的定义依 §1.2(14)′. 利用滤子与滤基的性质易验证以下条件互相等价:

$$\begin{cases} (F\times F)^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{U}, & \text{(2a)} \\ (F\times F)\mathcal{U} \vdash \mathcal{B}, & \text{(2b)} \end{cases}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{V}$ 的任一子基(特别,可取 $\mathcal{B} = \mathcal{V}$). 当以上条件满足时,说 F **一致连续**. 若 F 是双射且 F 与 F^{-1} 皆一致连续,则称 F 为**一致同构**. 当这样的 F 存在时说 X 与 Y 一致同构或一致等价.

1.4.3 命题 对于映射 $F: (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ 以下结论成立:

(i) F 一致连续的充要条件是:对任何网 $\{x_t\},\{y_t\} \subset X$,若 (x_t,y_t) 最终在每个 $U \in \mathcal{U}$ 中,则 (Fx_t,Fy_t) 最终在每个 $V \in \mathcal{V}$ 中;若 $\mathcal{U}$ 有可数基,则以上条件中的网可换成序列.

(ii) 若 F 一致连续,则 F 必连续. 因此,一致同构必为同胚.

证 (i) 首先设 F 一致连续,(x_t,y_t) 最终在每个 $U \in \mathcal{U}$ 中. 任给 $V \in \mathcal{V}$,由条件(2b)有 $U \in \mathcal{U}$,使 $(F\times F)U \subset V$. 取 t_0,使当 $t \geqslant t_0$ 时 $(x_t,y_t) \in U$,因而 $(Fx_t,Fy_t) \in V$.

反之,设 F 非一致连续,则有 $V \in \mathcal{V}$,使得 $(F\times F)U \not\subset V(\forall U \in \mathcal{U})$. $\forall U \in \mathcal{U}$,取 $(x_U,y_U) \in U$,使 $(Fx_U,Fy_U) \overline{\in} V$,则 $\{x_U\}$ 与 $\{y_U\}$ 是 X 中的网,显然 (x_U,y_U) 最终在每个 $U' \in \mathcal{U}$ 中,而 (Fx_U,Fy_U) 不在 V 中.

若 $\mathcal{U}$ 有可数基 $\{U_n\}$,则可设 $\{U_n\}$ 是一降列(否则可用 $\bigcap_1^n U_i$ 代 U_n),取 $(x_n,y_n) \in U_n$ 使 $(Fx_n,Fy_n) \overline{\in} V$,用 $\{(x_n,y_n)\}$ 代替上面的 $\{(x_U,y_U)\}$,可达同样结论.

(ii) 设 F 一致连续,在 X 中 $x_t \to x$,令 $y_t \equiv x$,则 (x_t,y_t) 最终在每个 $U \in \mathcal{U}$ 中. 于是由已证的(i)得出,(Fx_t,Fx) 最终在每个 $V \in \mathcal{V}$ 中,而这表明 $Fx_t \to Fx$. 因此 F 连续. □

已证命题表明,如同连续性一样,一致连续性亦可用网的某种"收敛性"来刻画. 对于下面就要引进的度量空间与拓扑向量空间,此处所说的"收敛"意义更明显. 例如,若 X,Y 是度量空间,则 $F: X \to Y$ 一致连续的充要条件是当 $d(x_n,y_n) \to 0(x_n,y_n \in X)$ 时 $d(Fx_n,Fy_n) \to 0$;若 X,Y 是拓扑向量空间,则 $F: X \to Y$ 一致连续的充要条件是当 $x_t - y_t \to 0(x_t,y_t \in X)$ 时 $Fx_t - Fy_t \to 0$. 这些结论是基本而常用的.

B. 度量空间

度量空间是 Fréchet 于 1906 年引进的,它是较一致空间更为直观的一种空间结构.

1.4.4 定义　设 X 是一非空集. 若给定了函数 $d: X \times X \to \mathbf{R}_+$，它满足如下**度量公理**:

(M_1) **对称性**: $d(x,y) = d(y,x)$;

(M_2) **三角不等式**: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$;

(M_3) **正定性**: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (以上 $x,y,z \in X$),

则称 X 或 (X,d) 为**度量空间**,称 d 为其**度量**;称 $d(x,y)$ 为点 x 与 y 之间的距离. 若将公理(M_3)减弱为

(M'_3) $d(x,y) \geqslant d(x,x) = 0 \qquad (\forall x,y \in X)$,

则称 d 为**伪度量**.

今后提到度量空间 X 而未作说明时,总认定其中的度量记为 d, 必要时也写作 d_X.

以下设 X 是给定的度量空间. 一旦有了直观而便于联想的度量,平常空间中基于度量的许多概念与事实就可能移植于度量空间. 例如, $\forall x \in X, r > 0$, 令

$$\begin{cases} B_r(x) = \{y \in X: d(x,y) < r\}, \\ \overline{B}_r(x) = \{y \in X: d(x,y) \leqslant r\}, \end{cases} \tag{3}$$

二者分别称为以 x 为心以 r 为半径的开球与闭球. 任给 $A,B \subset X$, 称

$$d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y) \tag{4}$$

为 A 与 B 之间的距离,约定 $d(x,B) = d(\{x\},B)$; 称

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} d(x,y) \tag{5}$$

为集 A 的直径,当 $\operatorname{diam} A < \infty$ 时称 A 为有界集.

现在指出度量 d 自然地生成一个一致结构,因而生成一个拓扑. $\forall r > 0$, 令

$$V_r = \{(x,y) \in X \times X: d(x,y) < r\}, \tag{6}$$

利用度量公理(M_1)~(M_3)及式(6)易直接验证:

$$\begin{cases} V_{r\wedge s} = V_r \cap V_s, \qquad \Delta = \bigcap_{r>0} V_r, \\ V_r = V_r^{-1}, \qquad V_r \circ V_r \subset V_{2r}. \end{cases} \tag{7}$$

由(7)推出,集族 $\mathscr{V} = \{V_r: r > 0\}$ 满足 1.4.2 中的条件(i)~(iv),因而以 $\mathscr{V}$ 为基在 X 上生成一个一致结构 $\mathscr{U}$,称它为由度量 d 生成的一致结构,而称由 $\mathscr{U}$ 生成的一致拓扑 τ 为 d 生成的**度量拓扑**. 注意到 $V_r(x) = B_r(x)$ (用(3)与

(6)),知 $\{B_r(x):r>0\}$ 是 $x\in X$ 的邻域基,且 $\{B_{1/n}(x):n\in \mathbf{N}\}$ 是 x 的可数邻域基,因而度量空间必为第一可数空间,度量拓扑可完全用序列收敛来描述(参看 1.3.11). 依度量拓扑的收敛称为**度量收敛**,它可描述为

$$x_n\to x\Leftrightarrow d(x_n,x)\to 0\qquad(n\to\infty).$$

设 X,Y 是两个度量空间,$F:X\to Y$. 用条件(2)易推出,F 一致连续的充要条件是

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:d(x,y)<\delta\Rightarrow d(Fx,Fy)<\varepsilon.$$

用序列方式表达,以上条件等价于

$$d(x_n,y_n)\to 0\Rightarrow d(Fx_n,Fy_n)\to 0.$$

若 F 是双射且 $d(Fx,Fy)\equiv d(x,y)(\forall x,y\in X)$,则称 F 为**等距同构**;当这样的 F 存在时,说 X 与 Y 互相等距同构. 这样,度量空间之间就有强度递增的三种同构,即

$$\text{等距同构}\Rightarrow\text{一致同构}\Rightarrow\text{同胚}.$$

在这三种同构下保持不变的性质依次称为度量性质、一致拓扑性质与拓扑性质. 若 d 与 d' 是 X 上的两个度量,则单位映射

$$I:(X,d)\to(X,d')$$

为等距同构、一致同构与同胚分别意味着 $d=d_1$、d 与 d_1 生成同一个一致结构、d 与 d_1 生成同一拓扑. 在以上三种情况下,分别说 d 与 d_1 恒等、一致等价与拓扑等价. 在判定两个度量一致等价时,常用到以下简单结果.

1.4.5 引理 设 $\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 是次可加(即 $\varphi(s+t)\leqslant\varphi(s)+\varphi(t)$)的增函数,在 $t=0$ 右连续,$\varphi(t)=0\Leftrightarrow t=0$. 若 d 是 X 上的度量,则 $d_1=\varphi\circ d$ 是 X 上与 d 一致等价的度量.

证明是直接的(试证之!). 满足 1.4.5 条件的 $\varphi(t)$ 例可取为

$$\sqrt{t},\qquad \ln(1+t),\qquad \frac{t}{1+t},\qquad t\wedge 1\text{ 等}.$$

1.4.6 定义 若序列 $\{x_n\}\subset X$ 满足

$$\lim_{m,n}d(x_m,x_n)=0,$$

则称 $\{x_n\}$ 为 **Cauchy 列**. 若 X 中的 Cauchy 列皆收敛,则称 X 为**完备度量空间**,简称为完备空间.

对于完备空间,在§3.2 中将作详细讨论.

试看几个解释性例子.

1.4.7 例 (i) 任给非空集 X,定义

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y;\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

直接看出 d 是一个度量. 设 V_r 依式(6),则 $V_{1/2}=\Delta$. 由此推出 d 生成的一致

结构为 $\mathcal{U}=\{A\subset X\times X:\Delta\subset A\}$，而 d 生成的拓扑就是离散拓扑(参看 1.3.5(i)).

(ii) $\mathbf{K}^n$ 中的 **Euclid 度量**定义为

$$d(x,y)=\Big(\sum_i |x_i-y_i|^2\Big)^{1/2},$$

此度量生成的拓扑就是通常拓扑(参看 1.3.5(iii)).

(iii) 设 d 是 $\mathbf{R}$ 上的 Euclid 度量，而令

$$d'(x,y)=|\arctan x-\arctan y|\qquad (x,y\in\mathbf{R}),$$

则 d' 是 $\mathbf{R}$ 上的一个度量，它与 d 不一致等价. 事实上，取 $\varepsilon_n>0,\varepsilon_n\to 0$，令 $x_n=\cot 2\varepsilon_n, y_n=\cot\varepsilon_n$，则 $d'(x_n,y_n)=\varepsilon_n\to 0$，而

$$d(x_n,y_n)=|\cot 2\varepsilon_n-\cot\varepsilon_n|$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon_n}{\sin^2(2\varepsilon_n)}\to\infty\quad(\text{用中值定理}).$$

注意 $(\mathbf{R},d')$ 是不完备的!

C. 拓扑向量空间

1.4.8 定义　设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，同时为 T_2 拓扑空间[①]，且 X 中的线性运算连续，即

$$X\times X\to X,\qquad (x,y)\to x+y$$

与

$$\mathbf{K}\times X\to X,\qquad (\alpha,x)\to\alpha x$$

皆为连续映射，则称 X 为**拓扑向量空间**(缩写为 TVS)，称其中的拓扑为**向量拓扑**.

如果仅仅假定 X 为向量空间与拓扑空间，那么 X 的性质只是其代数性质与拓扑性质的汇总. 运算的连续性是新增加的一个关键因素，它表明空间的代数结构与拓扑结构有某种**相容性**，正是这种相容性导致大量新的结论，这些结论既不适用于一般向量空间，亦不适用于一般拓扑空间. 可立即指出的一个简单而又基本的结论是：若 X 是 TVS, $T:X\to X$ 是由线性运算界定的一个双射，则 T 必为同胚. 例如，任意取定 $a\in X$ 与 $0\neq\alpha\in\mathbf{K}$，平移 $x\to a+x$ 与相似变换 $x\to\alpha x$ 都是从 X 到自身的同胚. 以上事实决定了 TVS 的拓扑结构具有极明显的特点. 平移是同胚意味着空间是齐次或均匀的，处处有同样的局部拓扑结构，因而零元的邻域系 $\mathcal{N}_0$ 完全决定了全空间的拓扑. 事实上有

$$\mathcal{N}_x=x+\mathcal{N}_0=\{x+U:U\in\mathcal{N}_0\}\qquad(\forall x\in X).$$

---

① 非 T_2 的拓扑向量空间亦可考虑，但意义不大.

与此相应，对于 TVS 中的极限概念而言，只要考虑以 0 为极限的收敛性就够了. 另一方面，相似变换是同胚意味着，任给 $A\subset X$ 与 $0\neq\alpha\in \mathbf{K}$，仅就拓扑性质与代数性质而言，集 A 与 αA 并无区别. 以上结论在 TVS 理论中具有基本意义.

鉴于邻域系 $\mathcal{N}_0$ 对于刻画向量拓扑的基本作用，TVS 理论将首先阐明 $\mathcal{N}_0$ 的结构. 每个 $U\in\mathcal{N}_0$ 称为 **0-邻域**，而 $\mathcal{N}_0$ 的基(或子基)称为空间的**局部基**(或**局部子基**). 局部基所满足的条件将在 §4.1 中给出(参看 4.1.1).

现在指明，若 X 是 TVS，则其中的 TVS 结构自然地生成一个一致结构. 任给 $A\subset X$，令

$$V_A=\{(x,y)\in X\times X: y-x\in A\},\tag{8}$$

则可直接验证(对照(7))：

$$\begin{cases}V_{A\cap B}=V_A\cap V_B,\ \Delta=\bigcap\{V_A:A\in\mathcal{N}_0\},\\ V_{(-A)}=V_A^{-1}, A+A\subset B\Rightarrow V_A\circ V_A\subset V_B.\end{cases}\tag{9}$$

利用(9)可验证，集族 $\mathcal{V}=\{V_A:A\in\mathcal{N}_0\}$ 满足 1.4.2 中的条件(i)～(iv)，因而以 $\mathcal{V}$ 为基生成 X 上的一个一致结构 $\mathcal{U}$，称它为由 X 的向量拓扑生成的一致结构. 因显然有

$$V_A(x)=x+A\qquad (x\in X, A\in\mathcal{N}_0),$$

故由 $\mathcal{U}$ 生成的一致拓扑恰为 X 上的原拓扑.

今后将 TVS 看作一致空间时，其中总采用如上所定义的一致结构.

设 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的 TVS. 以 $L(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的连续线性算子之全体. 若 $T\in L(X,Y)$ 是同构且 $T^{-1}\in L(Y,X)$，则称 T 为**拓扑同构**；当这样的 T 存在时，说 X 与 Y 互相拓扑同构. 对于线性算子 $T:X\to Y$，由分解

$$Tx=Tx_0+T(x-x_0)$$

看出，T 在任一点 x_0 连续⇔T 在 $x=0$ 处连续. 另一方面，若 $T\in L(X,Y)$，则对 Y 中的任给 0-邻域 A，存在 X 中的 0-邻域 B，使 $TB\subset A$，而这推出

$$(T\times T)V_B\subset V_A\qquad (用(8)).$$

这就表明(依(2))，$T\in L(X,Y)\Leftrightarrow T$ 一致连续. 因此，当 $T:X\to Y$ 为拓扑同构时必为一致同构.

D. 局部凸空间

如同拓扑空间一样，TVS 也是高度缺乏构造性的. 关键的缺陷是，TVS 中并没有给出可计量的尺度，用以描述两点之间的接近程度. 有几种方法来解决这一问题，它们只适用于某些特殊的 TVS，局部凸空间是其中最重要的一种. 简单来说，局部凸空间中的向量拓扑是利用向量的一族“长度”来刻画的. 现在就来准确定义“长度”概念.

1.4.9 定义 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间. 若函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbf{R}_+$ 满足如下**半范公理**:

(N_1) 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\ (\alpha\in\mathbf{K}, x\in X)$;

(N_2) 三角不等式: $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\ (x,y\in X)$,

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的一个**半范**;若半范 $\|\cdot\|$ 还满足

(N_3) 正定性: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0(x\in X)$,

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**范数**,而称(N_1)~(N_3)为**范数公理**.

半范(尤其是范数)就是长度的某种抽象化,它确有长度的若干特征. 例如,若 $\|\cdot\|$ 是半范,则直接由公理(N_1)(N_2)推出 $\|0\| = 0$;

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|; \tag{10}$$

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leqslant\|x-y\|. \tag{11}$$

最常用的范数是 **Euclid 范数**:

$$|x| = \Big(\sum_i |x_i|^2\Big)^{1/2},\ x=(x_i)\in\mathbf{K}^n.$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中,Euclid 范数就是通常的长度.

定义了范数的向量空间称为**赋范空间**,这将在后面讨论. 现在考虑一类比赋范空间广泛得多的空间,它的结构不是由一个范数,而是由一族半范界定. 设向量空间 X 上给定了一族半范 $\{\|\cdot\|_i: i\in I\}$,它满足以下条件:

(N'_3) 分离性: $\|x\|_i = 0\ (\forall i\in I)\Leftrightarrow x=0(x\in X)$,

则称 $\{\|\cdot\|_i\}$ 为 X 上**分离点的半范族**. "分离点"意味着:若 $x\neq y$, 则 $\exists i\in I$, 使得 $\|x-y\|_i\neq 0$. 注意当 I 仅含一元时,(N'_3)重合于(N_3). 若令

$$B_{ir} = \{x\in X: \|x\|_i < r\}, \tag{12}$$

则以 $\mathscr{B}=\{B_{ir}: i\in I, r>0\}$ 为局部子基在 X 中生成一个向量拓扑,依此拓扑,X 中的网收敛可描述为

$$x_t\to 0\Leftrightarrow\|x_t\|_i\to 0\qquad(\forall i\in I). \tag{13}$$

利用(N_1)(N_2)易直接验证,由(12)定义的 B_{ir} 皆为凸集(参看 1.2.6). 因此,X 有一个由凸集组成的局部基,简称为**凸局部基**. 凡有凸局部基的 TVS 称为**局部凸空间**(缩写为 LCS). 因此,用分离点的半范族定义的 TVS 是 LCS. 反之,在 4.1.12 中将证明,任何 LCS 的拓扑都可以由一族半范生成.

E. 赋准范空间

1.4.10 定义 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间. 若 X 上给定了一个函数 $\|\cdot\|: X\to\mathbf{R}_+$,它满足以下条件:

(i) $\|\alpha x\|\leqslant\|x\|\ (|\alpha|\leqslant 1)$;

(ii) 三角不等式：$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$；

(iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$；

(iv) $\lim\limits_{\alpha_n \to 0}\|\alpha_n x\| = 0(\alpha,\alpha_n \in \mathbf{K}, x, y \in X)$，

则称 X 或 $(X,\|\cdot\|)$ 为**赋准范空间**，称 $\|\cdot\|$ 为**准范数**.

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一赋准范空间. 令

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad (x,y \in X), \tag{14}$$

则仅用 1.4.10 中的条件(i)～(iii)即可证明 d 是 X 上的一个度量，它显然是平移不变的，即

$$d(x,y) = d(x+z,y+z) \qquad (x,y,z \in X). \tag{15}$$

范数公理(N_1)～(N_3)显然蕴涵了 1.4.10 中的条件(i)～(iv). 因此，赋范空间依(14)定义的度量亦成为度量空间. 赋准范(赋范)空间中的度量拓扑称为**准范数(范数)拓扑**. 在未作说明时，在赋准范(赋范)空间中总使用由(14)定义的度量及其拓扑. 若赋准范(赋范)空间是完备度量空间，则称之为 **Fréchet 空间**[①]**(Banach 空间)**. 一个自然被期望但并非显然的事实是，赋准范空间中的线性运算是连续的，因而赋准范空间是 TVS(参看[6,p. 27]).

不过，赋准范空间未必是 LCS，同时为 LCS 的赋准范空间构成一类更特殊的 TVS，它的特征是：其拓扑可由一可数半范族生成(参看 §4.1D).

F. 赋范空间

前面已经定义了赋范空间(见 1.4.9)，现在作某些进一步的考虑. 若 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，则它同时也是赋准范空间、度量空间、LCS，更是 TVS、一致空间与拓扑空间，因此其中包含了我们迄今提到的所有抽象空间结构. 很自然，对于赋范空间可建立更丰富的理论. 但这样一来，它的适用范围也就更小些.

设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间. 由式(3)定义的球现在可写成：

$$\begin{cases} B_r(x) = \{y \in X : \|y-x\| < r\}, \\ \bar{B}_r(x) = \{y \in X : \|y-x\| \leqslant r\}. \end{cases} \tag{16}$$

赋范空间的特殊性在于，对于球有以下简单变换公式：

$$B_r(x) = x + rB_1(0), \qquad \bar{B}_r(x) = x + r\bar{B}_1(0). \tag{17}$$

因此，唯有单位球是值得考虑的. 为方便起见，约定 B 或 B_X 记闭单位球 $\bar{B}_1(0)$，以 S 或 S_X 记单位球面，即

$$S = S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}. \tag{18}$$

① 有些文献将局部凸且完备的可赋准范空间称为 Fréchet 空间，本书宁可取较宽泛的定义.

仅仅利用球 B，即可表达以下事实：

(i) $\{rB:r>0\}$（或 $\{n^{-1}B:n\in\mathbf{N}\}$）是 X 的一个局部基.

(ii) $X=\bigcup_1^\infty nB$.

实际上，可以说关于赋范空间的任何问题原则上都可以通过球 B 得到描述. 明确这一点，对于理解赋范空间是至关重要的.

设 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间，其中的范数通常都记作 $\|\cdot\|$，只是在必要时才区分为 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Y$. 任给线性算子 $T:X\to Y$，$T\in L(X,Y)$ 的充要条件是 T 在 $x=0$ 连续，后者又等价于

$$\forall\varepsilon>0,\qquad \exists\delta>0:T(\delta B_X)\subset\varepsilon B_Y. \tag{19}$$

(19)可写作 $TB_X\subset\beta B_Y,\beta>0$，这相当于

$$\|Tx\|\leqslant\beta\|x\|\quad(\forall x\in X). \tag{20}$$

由此又推出：一个线性同构 $T:X\to Y$ 为拓扑同构的充要条件是：存在正常数 α,β，使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\beta\|x\|\quad(\forall x\in X). \tag{21}$$

若 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 是 X 上的两个范数，则单位算子

$$I:(X,\|\cdot\|)\to(X,\|\cdot\|')$$

是拓扑同构的充要条件是：存在正常数 α,β，使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|x\|'\leqslant\beta\|x\|\quad(\forall x\in X). \tag{22}$$

当条件(22)满足时称 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 为等价范数. 等价范数确定相同的范数拓扑. 互相拓扑同构的赋范空间中的 Cauchy 列互相对应，因而必定同为完备或不完备的. 若 $T:X\to Y$ 是线性同构且 $\|Tx\|=\|x\|$ $(x\in X)$，则称 T 为等距同构. 等距同构的赋范空间无论作为 TVS 或度量空间都没有实质性差别.

比赋范空间更特殊的一类 TVS 是内积空间.

1.4.11 定义 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间. 若给定了函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle:X\times X\to\mathbf{K}$，它满足如下**内积公理**：

(I_1) $\langle x,y\rangle$ 对 x 是线性的；

(I_2) **共轭对称性**：$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$；

(I_3) **正定性**：$\langle x,x\rangle\geqslant0,\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$（以上 $x,y\in X$），

则称 X 为**内积空间**，称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为**内积**. 若 X 是内积空间，它依范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 完备，则称 X 为 **Hilbert 空间**.

需验证 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 确为范数. $\|\cdot\|$ 的齐次性与正定性（参看1.4.9）是明显的. 三角不等式基于如下的 **Schwarz 不等式**：

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|\qquad(x,y\in X). \tag{23}$$

(23)的证明如下：$\forall \alpha \in \mathbf{K}$，由公理($I_1$)～($I_3$)有

$$0 \leqslant \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle$$
$$= \| x \|^2 - \alpha \langle y, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + | \alpha |^2 + \| y \|^2.$$

取 $\alpha = \langle x, y \rangle / \| y \|^2$，即得出不等式(23).

由线性代数熟知，$\mathbf{K}^n$ 依如下的**标准内积**：

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i = x^{\mathrm{T}} \bar{y} \qquad (x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbf{K}^n) \tag{24}$$

是一个内积空间. $\mathbf{K}^n$ 常用作解释 Hilbert 空间概念的标本.

以下设 X 是一个给定的内积空间，由内积公理(I_1)～(I_3)可直接推出如下一些基本事实. 首先，结合公理(I_1)与(I_2)知 $\langle x, y \rangle$ 对 y 是**共轭线性的**：

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \qquad (x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{K}).$$

一般地，若 $\sum \alpha_i x_i$ 与 $\sum \beta_j y_j$ 是 X 中元的两个有限线性组合，则

$$\begin{cases} \left\langle \sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j \right\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j \langle x_i, y_j \rangle; & (25a) \\ \left\| \sum_i \alpha_i x_i \right\|^2 = \sum_{i,k} \alpha_i \bar{\alpha}_k \langle x_i, x_k \rangle. & (25b) \end{cases}$$

若 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$，则公理 I_2 等价于**对称性**：$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. 因此 $\langle x, y \rangle$ 是双线性的.

设在 X 中 $x_n \to x, y_n \to y$，则用 Schwarz 不等式可推出

$$| \langle x_m, y_n \rangle - \langle x, y \rangle |$$
$$\leqslant | \langle x_m, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle | + | \langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle |$$
$$\leqslant \| x_m - x \| \, \| y_n \| + \| x \| \, \| y_n - y \| \to 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

这表明内积是连续的，表为公式就是

$$\lim_{m,n} \langle x_m, y_n \rangle = \langle \lim_m x_m, \lim_n y_n \rangle. \tag{26}$$

由于定义了与通常向量**点乘**十分类似的内积，Hilbert 空间具有某种非常接近于 Euclid 空间的几何结构. 解析几何中的许多结果，均可移植于抽象的 Hilbert 空间，这就使得 Hilbert 空间成为一种具有鲜明直观形象的数学结构. Hilbert 空间成为最早被人们接受且最先获得广泛应用的抽象空间，其结构与平常空间的高度类似性当然是主要原因之一.

§1.5 空间的构成

在抽象空间的理论与应用中，常常只直接给定少数基本的空间，然后依一定的规则从已知的空间构成新的空间. 空间的构成法是多种多样的，但最常用的是取给定空间的子空间、积空间与商空间，这正是本节要考虑的. 以下的讨论主要对拓扑空间进行，对于其他抽象空间仅简略提到基本的结论，以与拓扑

空间的构成相对照.

A. 子空间

设 (X,τ) 是给定的拓扑空间, $\varnothing \neq M \subset X$.

1.5.1 定义　令 $\tau_M = \{M \cap A : A \in \tau\}$, 则 τ_M 是 M 上的一个拓扑,称之为 τ 在 M 上的**相对拓扑**,称 (M,τ_M) 为 (X,τ) 的**拓扑子空间**,或简单地说: M 是 X 的子空间.

今后当提到拓扑空间 $M(M \subset X)$ 而未加说明时,总认定在 M 中使用相对拓扑. 凡基于相对拓扑的概念皆冠以**相对**二字. 例如, τ_M 中的集称为**相对开集**,关于拓扑 τ_M 的闭包称为**相对闭包**,等等. 重要的问题是:如何通过有关原拓扑 τ 的适当概念来表达出相对概念? 以下命题综合了主要的结论.

1.5.2 命题　设 (M,τ_M) 是 (X,τ) 的子空间,则以下结论成立:

(i) 若 $\mathscr{B}$ 是 τ 的一个基(或子基),则 $\mathscr{B}_M \triangleq \{M \cap B : B \in \mathscr{B}\}$ 是 τ_M 的一个基(或子基).

(ii) $A \subset M$ 是相对闭集 $\Leftrightarrow$ 存在闭集 $B \subset X$, 使得 $A = M \cap B$.

(iii) $A \subset M$ 是 $x \in M$ 的相对邻域 $\Leftrightarrow$ 存在 x 的邻域 B, 使得 $A = M \cap B$.

(iv) 若 $\{x_t\} \subset M$ 是一个网, $x \in M$, 则在 M 中 $x_t \to x \Leftrightarrow$ 在 X 中 $x_t \to x$.

(v) 任给 $A \subset M$, A 的相对闭包 $= M \cap \overline{A}$.

(vi) 任给拓扑空间 Ω 与映射 $F:\Omega \to M$, 有

$$F \in C(\Omega,M) \Leftrightarrow F \in C(\Omega,X).$$

证　(i)与(ii)是明显的.

(iii) A 是 x 的相对邻域 $\Leftrightarrow$ 存在 $V \in \tau$, 使得 $x \in M \cap V \subset A \Leftrightarrow$ 存在 x 的邻域 B (如取 $B = V \cup A$),使 $A = M \cap B$.

直接看出(ii)⇒(v)(用§1.3(9)),(iii)⇒(iv)⇒(vi),故命题得证. □

由 1.5.2 推出,若 M 是 X 的开(闭)子集, $A \subset M$, 则 A 是 M 中的相对开集(相对闭集)$\Leftrightarrow A$ 在 X 中是开(闭)集.

现在从另一种观点来解释相对拓扑. 设 $i:M \subset X$ 是包含映射, τ_M 依 1.5.1,则有 $\tau_M = i^{-1}\tau$. 这表明 $i:(M,\tau_M) \to (X,\tau)$ 连续,且 τ_M 是 M 上使 i 连续的最小拓扑.

以上解释还可以进一步推广. 设 Ω 是任一非空集, $T:\Omega \to X$ 是一单射,则 $\tau_\Omega \triangleq T^{-1}\tau$ 是 Ω 上的一个拓扑,称为由映射 T 生成的拓扑. 若将 $T\Omega$ 看作 X 的子空间,则 $T:\Omega \to T\Omega$ 必为同胚,因而不妨将 Ω 与 $T\Omega$ 同等地看作 X 的子空间,就像 Ω 已嵌入 X 中一样. 因此称 $T:\Omega \to X$ 为**拓扑嵌入**. 当这样的拓扑嵌

入存在时，也采用记号 $\Omega \subset X$.

如果 Ω 是已给的拓扑空间，$T:\Omega \to X$ 是单射，则要 T 为拓扑嵌入，以下每个条件是充分必要的：

(i) T 连续且 $T^{-1}:T\Omega \to \Omega$ 亦连续；

(ii) 任给网 $\{\omega_t\} \subset \Omega$ 与 $\omega \in \Omega$，有 $\omega_t \to \omega \Leftrightarrow T\omega_t \to T\omega$.

以上条件(尤其是(ii))今后将多次运用.

对于其他抽象空间的子空间，作如下简述. 设 $\varnothing \neq M \subset X$，$i:M \subset X$ 是包含映射.

1° 设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间，则

$$\mathscr{U}_M \triangleq (i \times i)^{-1}\mathscr{U} = \{(M \times M) \cap U : U \in \mathscr{U}\} \tag{1}$$

是 M 上的一致结构，称为 $\mathscr{U}$ 在 M 上的**相对一致结构**，称 $(M,\mathscr{U}_M)$ 为 $(X,\mathscr{U})$ 的**子一致空间**. (1)表明 $\mathscr{U}_M$ 是 M 上使得 $i:M \subset X$ 一致连续的最小一致结构，$\mathscr{U}_M$ 生成的一致拓扑正是 M 上的相对拓扑.

2° 设 (X,d) 是一度量空间，则 d 限制在 M 上时仍为度量，且 d 在 M 上生成的一致结构与度量拓扑恰为 M 上的相对一致结构与相对拓扑. 因此，M 作为 X 的子度量空间、子一致空间与拓扑子空间，三者互相兼容.

以上对于子集 M 并无特殊要求. 下面假设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，M 是 X 的向量子空间.

3° 设 X 是 TVS，在 M 中采用相对拓扑，则 M 上的线性运算依然连续. 因而 M 亦为 TVS，M 上的拓扑所生成的一致结构，正是 M 上的相对一致结构.

4° 设 X 是 LCS，其拓扑由半范族 $\{\|\cdot\|_i\}$ 生成，则 $\|\cdot\|_i$ 限制在 M 上时仍是一半范族并生成 M 上的相对拓扑，因此 M 亦为 LCS.

5° 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋准范(赋范)空间，则 $\|\cdot\|$ 在 M 上的限制亦为准范(范数)，其准范数(范数)拓扑就是 M 上的相对拓扑.

B. 映射族生成的拓扑

1.5.3 定义 设 $(Y_i,\tau_i)(i \in I)$ 是一族拓扑空间，$f_i:X \to Y_i(i \in I)$ 是一族映射. 令

$$\mathscr{B} = \bigcup_i f_i^{-1}\tau_i, \tag{2}$$

则显然 $\mathscr{B}^\sigma = X$，于是以 $\mathscr{B}$ 为子基生成 X 上一拓扑 τ (依 1.3.3)，称它为由映射族 $\{f_i\}$ 生成的拓扑.

容易看出，若将(2)中的 τ_i 代以 τ_i 的任一子基 $\mathscr{B}_i$，所得的 $\mathscr{B}$ 仍为拓扑 τ 的子基.

以下命题汇集了映射族生成拓扑的主要性质.

1.5.4 命题　设 $\{f_i: X \to Y_i\}$ 与 τ 依 1.5.3,则以下结论成立:

(i) τ 是 X 上使每个 $f_i: X \to Y_i$ 连续的最小拓扑.

(ii) 任给网 $\{x_t\} \subset X, x \in X$, 有

$$x_t \to x \Leftrightarrow f_i(x_t) \to f_i(x) \qquad (\forall i \in I).$$

(iii) 任给拓扑空间 Ω 与映射 $g: \Omega \to X$, 有

$$g \text{ 连续} \Leftrightarrow f_i g \in C(\Omega, Y_i) \qquad (\forall i \in I).$$

(iv) 若 $Y_i (i \in I)$ 皆为 T_2 空间, $\{f_i\}$ 分离 X 中的点,即

$$x \neq y (x, y \in X) \Rightarrow \exists i \in I, \text{使 } f_i(x) \neq f_i(y),$$

则 (X, τ) 是 T_2 空间.

证　(i) 直接由式(2)看出.

(ii) 显然 $x_t \to x \Rightarrow f_i(x_t) \to f_i(x) (\forall i \in I)$. 反之,设 $f_i(x_t) \to f_i(x) (\forall i \in I)$. 任给 x 的一个子基邻域 $f_i^{-1}V, V \in \tau_i, V$ 是 $f_i(x)$ 的一个邻域,因此 $f_i(x_t)$ 最终进入 V, 从而 x_t 最终进入 $f_i^{-1}V$, 这表明 $x_t \to x$.

(iii) 若 $f_i g (i \in I)$ 皆连续, $\mathscr{B}$ 依(2),则

$$g^{-1}\mathscr{B} = \bigcup_i g^{-1} f_i^{-1} \tau_i = \bigcup_i (f_i g)^{-1} \tau_i \subset \tau_\Omega,$$

这表明 g 连续. 逆命题不必证.

(iv) 设 $x, y \in X, x \neq y$. 取定 $i \in I$, 使 $f_i(x) \neq f_i(y)$. 在 Y_i 中取分离 $f_i(x)$ 与 $f_i(y)$ 的开邻域 U 与 V, 则 $f_i^{-1}U$ 与 $f_i^{-1}V$ 是 X 中分离 x 与 y 的开邻域,故 X 是 T_2 空间. □

映射族生成拓扑的两种特殊情况如下:

1°　设 τ_M 依 1.5.1, $i: M \subset X$ 是包含映射,则对照 $\tau_M = i^{-1}\tau$ 与式(2)看出,相对拓扑 τ_M 就是映射 i 生成的拓扑.

2°　设 $F \subset \mathbf{K}^X$, 在 $\mathbf{K}$ 中使用通常拓扑, F 分离 X 中的点,即

$$x \neq y (x, y \in X) \Rightarrow \exists f \in F, \text{使 } f(x) \neq f(y),$$

则函数族 F 生成 X 上一 T_2 拓扑 τ, τ 是 X 上使 $F \subset C(X)$ 的最小拓扑. 这一构成拓扑的方法将在 §4.4 中使用.

映射族生成拓扑的最重要的应用,是下面就要考虑的积拓扑.

C. 积空间

本段中设 $X = \prod X_i, P_i: X \to X_i (i \in I)$ 是投影(参看 §1.2C).

积拓扑首先是由 Tychonoff 引进的.

1.5.5 定义　设 $(X_i, \tau_i)(i \in I)$ 是一族拓扑空间, τ 是 X 上由投影族 $\{P_i\}$ 生成的拓扑,则称 τ 为 X 中的**积拓扑**,称 (X, τ) 为 $X_i (i \in I)$ 的**积拓扑空

间,简称为积空间.

由 1.5.3,积拓扑 τ 有形如 $\mathscr{B}=\bigcup P_i^{-1}\mathscr{B}_i$ 的子基,$\mathscr{B}_i$ 是 τ_i 的任何子基. 若 $\mathscr{B}_i$ 是 τ_i 的基,则形如

$$\prod_{k=1}^{n} B_k \times \prod_{i\neq i_1,\cdots,i_n} X_i \tag{3}$$

的集构成 τ 的一个基,其中 $B_k\in\mathscr{B}_{i_k}(1\leqslant k\leqslant n)$. 若 $I=\{1,2,\cdots,n\}$,则积拓扑 τ 有如下的基:

$$\left\{\prod_{i=1}^{n} B_i : B_i\in\mathscr{B}_i(1\leqslant i\leqslant n)\right\},$$

此时 τ 与 1.3.5(iii)所界定的积拓扑一致.

以下命题的大部分结论已包含于命题 1.5.4.

1.5.6 命题 设 τ 是 $X=\prod X_i$ 上的积拓扑,则以下结论成立:

(i) 投影 $P_i(i\in I)$ 皆为连续开映射,且 τ 是 X 上使 P_i 皆连续的最小拓扑.

(ii) 在 X 中 $x^t\to x\Leftrightarrow x_i^t\to x_i(\forall i\in I)$.

(iii) 任给拓扑空间 Ω 与映射 $g=(g_i):\Omega\to X$(记号依 §1.2C),有 g 连续 $\Leftrightarrow$ 每个 $g_i(i\in I)$ 连续.

(iv) 若 X_i 皆为 T_2 空间,则 (X,τ) 是 T_2 空间.

(v) 若 $A_i\subset X_i(i\in I)$,则

$$\overline{\prod_i A_i}=\prod_i \overline{A}_i,\qquad \left(\prod_i A_i\right)^\circ=\prod_i A^\circ_i, \tag{4}$$

对于后一式假定 I 是有限集. 由(4)直接推出:闭集的积集是闭集.

证 因 τ 有形如(3)的基开集,故 P_i 显然为开映射. 余下只要证(v). 由 $\prod\overline{A}_i=\bigcap P_i^{-1}\overline{A}_i$(用 §1.2(12))为闭集推出 $\overline{\prod A_i}\subset\prod\overline{A}_i$. 若 $x\in X\backslash\overline{\prod A_i}$,则 x 有一个形如(3)的开邻域,使其与 $\prod A_i$ 不交,因而对某个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 有 $B_k\cap A_{i_k}=\varnothing$,$B_k$ 是 x_{i_k} 的开邻域. 因此 $x_{i_k}\overline{\in}\overline{A}_{i_k}$,从而 $x\overline{\in}\prod\overline{A}_i$. 这就证得(4)的前一式. 其次设 I 是有限集,则由 §1.2(12)与 §1.3(10),(13)有

$$\left(\prod_i A_i\right)^\circ=\left(\bigcap_i P_i^{-1}A_i\right)^\circ=\bigcap_i P_i^{-1}A^\circ_i=\prod_i A^\circ_i. \qquad\square$$

1.5.6 中的结论(ii),(iii)可概括为:依积拓扑的收敛与连续分别归结为依坐标收敛与依坐标连续. 这一事实最典型地表现了积拓扑的特征,通常,就称积拓扑为依坐标收敛拓扑或**点态收敛拓扑**.

依 1.5.5,积拓扑是映射族生成拓扑的特殊情况. 有趣的是,亦可通过积

拓扑来描述映射族生成拓扑. 设 $f_i:X\to Y_i(i\in I)$ 与 τ 依定义 1.5.3, $\{f_i\}$ 分离 X 中的点. 令 $Y=\prod Y_i$, 定义所谓**赋值映射**

$$e:X\to Y,\qquad x\to(f_i(x)),\tag{5}$$

则 e 是一个单射. 结合 1.5.4(ii)与 1.5.6(ii)得出:在 X 中

$$x_t\to x\Leftrightarrow f_i(x_t)\to f_i(x)\qquad(\forall i\in I)$$
$$\Leftrightarrow \text{在 } Y \text{ 中 } e(x_t)\to e(x),$$

这表明(5)是一拓扑嵌入. 因此不妨认为, $\{f_i\}$ 生成的拓扑 τ, 实质上就是 Y 中的积拓扑在 $e(X)$ 上的相对拓扑.

本书中主要用到以下特殊情况:设 $D\subset\mathbf{K}$, $F\subset D^X$ 分离 X 中的点, τ 是 X 上由 F 生成的 T_2 拓扑,则赋值映射

$$e:X\to D^F,\qquad x\to(f(x))_{f\in F}\tag{6}$$

是一拓扑嵌入,因而可以认为 X 是 D^F 的子空间. 因形如 D^F 的空间具有标准的结构与许多已知性质,建立一个如(6)的嵌入映射常常是拓扑空间研究中的重要结果. 本书将多次遇到这一类的结果.

下面是关于其他抽象空间积空间的一个勾画.

1° 设 $(X_i,\mathscr{U}_i)(i\in I)$ 是一族一致空间,则以(对照(2))

$$\mathscr{B}=\bigcup_i(P_i\times P_i)^{-1}\mathscr{U}_i\tag{7}$$

为子基生成 X 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$,称为**积一致结构**,称 $(X,\mathscr{U})$ 为 $X_i(i\in I)$ 的**积一致空间**. $\mathscr{U}$ 是 X 上使每个 P_i 一致连续的最小一致结构,它生成的一致拓扑就是积拓扑.

2° 设 (X_i,d_i) 是**可数个**度量空间,则

$$d(x,y)=\sum_i 2^{-i}[d_i(x_i,y_i)\wedge 1]\tag{8}$$

是 X 上的一个度量,它的度量拓扑就是积拓扑,它生成的一致结构就是积一致结构. 若每个 X_i 完备,则 (X,d) 亦完备.

3° 设 $X_i(i\in I)$ 是 $\mathbf{K}$ 上一族 TVS,则 X 依积拓扑是 T_2 空间且其中的线性运算连续(用 1.5.6(iii)(iv)),因而是 TVS. X 上的向量拓扑生成的一致结构就是积一致结构.

4° 设 $(X_i,\|\cdot\|_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间, $p(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的任一范数,则

$$\|x\|=p(\|x_1\|_1,\|x_2\|_2,\cdots,\|x_n\|_n)\qquad(x=(x_i)\in X)\tag{9}$$

是 X 上的一个范数,其范数拓扑就是积拓扑. X 中任何生成积拓扑的范数皆称为**积范数**,(9)就是一个积范数. 若每个 X_i 为 Banach 空间,则 X 依积范数亦是 Banach 空间. 若每个 X_i 是内积空间(Hilbert 空间), $p(\cdot)$ 是 Euclid 范数,则 X 亦是内积空间(Hilbert 空间).

D. 商空间

设 (X,τ) 是给定的拓扑空间.

1.5.7 定义 设 $F:X\to Y$ 是一满射. 令

$$\tau_Q=\{B\subset Y: F^{-1}B\in\tau\},\tag{10}$$

则 τ_Q 是 Y 上的一个拓扑,称为由 F 定义的**商拓扑**,而称 F 为**商映射**.

若～是 X 上的一个等价关系,$\widetilde{X}=X/\sim$,则投影 $P:X\to\widetilde{X}$ 是满射,于是依 1.5.7 在 $\widetilde{X}$ 上定义出一个商拓扑,当 $\widetilde{X}$ 采用商拓扑时称为 X 的**商空间**. 依商拓扑,$B\subset\widetilde{X}$ 是开集 $\Leftrightarrow P^{-1}B\in\tau$.

以下结果可与同态定理 1.2.5 相对照.

1.5.8 定理 设 $F:X\to Y$ 是一个商映射,$R=F^{-1}F$,$\widetilde{X}=X/R$,$\widetilde{X}$ 上由投影 $P:X\to\widetilde{X}$ 定义商拓扑,则(参看§1.2(21))

$$\Phi=FP^{-1}:\widetilde{X}\to Y,\qquad Px\to Fx$$

是一同胚,因而可将 Y 与 $\widetilde{X}$ 等同地看作 X 的商空间.

证 在§1.2D 中已指明 Φ 为双射. 任给 $B\subset\widetilde{X}$,

$$\begin{aligned}\Phi B\in\tau_Y&\Leftrightarrow F^{-1}\Phi B=F^{-1}FP^{-1}B\in\tau\\&\Leftrightarrow P^{-1}PP^{-1}B=P^{-1}B\in\tau\qquad(\text{用 }F^{-1}F=P^{-1}P)\\&\Leftrightarrow B\text{ 是 }\widetilde{X}\text{ 中的开集},\end{aligned}$$

可见 Φ 是同胚. □

设 τ_Q 依(10). 由(10)直接看出,τ_Q 是 Y 上使 F 连续的最大拓扑,$B\subset Y$ 是闭集 $\Leftrightarrow F^{-1}B$ 是闭集. 不过,直接依(10)来判定 F 为商映射未必方便. 下面给出商映射的某些充分条件.

1.5.9 命题 (i) 若 $F:X\to Y$ 是连续的开或闭满射,则 F 是商映射.

(ii) 设 $F:X\to Y$ 是商映射,$G:Y\to Z$,Y 与 Z 是拓扑空间,则 $G\in C(Y,Z)\Leftrightarrow GF\in C(X,Z)$,$G$ 是商映射 $\Leftrightarrow GF$ 是商映射.

证 (i) 只考虑"开"的情况. 设 $B\subset Y$,$F^{-1}B$ 是开集,则由 F 是开满射知 $B=FF^{-1}B$ 是开集. 因此 F 是商映射.

(ii) 若 $GF\in C(X,Z)$,则对任给开集 $V\subset Z$ 有

$$F^{-1}G^{-1}V=(GF)^{-1}V\in\tau_X,$$

从而 $G^{-1}V\in\tau_Y$,因而 $G\in C(Y,Z)$. 若 G 为商映射,则

$$\begin{aligned}\tau_Z&=\{V\subset Z: G^{-1}V\in\tau_Y\}\\&=\{V\subset Z: F^{-1}G^{-1}V=(GF)^{-1}V\in\tau_X\},\end{aligned}$$

这得出 GF 是商映射. 类似地,从 GF 是商映射可推出 G 是商映射. □

对于其他抽象空间,亦可考虑商结构,但其定义并不如 1.5.7 这样简单,因此留待以后章节分别考虑.

E. 拓扑性质

设 P 是关于拓扑空间的某个命题. 若 P 不因空间的同胚变换而改变,则说 P 是一个**拓扑性质**或**拓扑不变量**. 拓扑学所要研究的,正是空间的拓扑性质,而不是空间的具体形式.

在考察某个拓扑性质 P 时,一个基本的问题是:具有性质 P 的空间按一定规则构成的新空间是否仍有性质 P? 特别,具有性质 P 的空间的子空间、积空间与商空间是否有性质 P? 在讨论这类问题时,通常使用如下一组行之有效的术语.

1.5.10 定义　(i) 若有性质 P 的空间的任何(开)子空间亦有性质 P, 则说 P 是(开)**遗传的**. "闭遗传"的意义自明.

(ii) 若有性质 P 的任何一族空间的积空间亦有性质 P, 则说 P 是**可乘的**. "可数可乘"与"有限可乘"的意义自明.

(iii) 若当 X 有性质 P, $F: X \to Y$ 是连续满射时 Y 亦有性质 P, 则说 P 在连续映射下保持. 类似地,可界定在其他类映射下保持的性质. 在商映射下保持的性质称为**可除**的性质.

若拓扑空间 (X,τ) 有性质 P, 则称 τ 为 X 上的一个 P 拓扑. 例如,若 (X,τ) 是 T_2 空间,则称 τ 为 T_2 拓扑.

下面通过对第一与第二可数性的考察来解释以上术语.

1.5.11 定理　(i) 第一与第二可数性是遗传的.

(ii) 第一与第二可数性在连续开满射下保持.

(iii) 设 $X_i (i \in I)$ 是一族拓扑空间, $X = \prod X_i$, 则 X 是第一(或第二)可数空间⇔每个 X_i 是第一(或第二)可数空间,且除至多可数个例外, X_i 具有平凡拓扑. 因此第一或第二可数性是可数可乘的.

证　(i)与(ii)的证明是直接的.

(iii) 不妨只考虑第二可数性. 若 X 是第二可数的,则由(ii)知每个 X_i 是第二可数的. 若具非平凡拓扑的 X_i 超过可数个,则不妨设 I 不可数且每个 X_i 具非平凡拓扑,因而有非空真开子集 $V_i (i \in I)$. 取 X 的可数拓扑基 $\{B_n\}$. $\forall n \in \mathbf{N}$, 由式(3)看出仅有有限个 i 使 $P_i B_n \neq X_i$. 因此必有 $i \in I$, 使得 $\forall n \in \mathbf{N}$, 有 $P_i B_n = X_i$. 另一方面,必有 $n \in \mathbf{N}$, 使 $B_n \subset P_i^{-1} V_i$, 从而 $P_i B_n \subset V_i$, 得出矛盾.

对于逆命题,只要证:若 $I = \mathbf{N}$, 每个 $X_i (i \in \mathbf{N})$ 有可数拓扑基 $\mathscr{B}_i$, 则 $C = \prod_I X_i$ 是第二可数的. 这由 $\bigcup P_i^{-1} \mathscr{B}_i$ 是 X 的可数拓扑子基推得.　□

以上定理表明,就遗传性与可乘性而言,第一与第二可数性是较好的

性质.

对于其他抽象空间,可提出类似的问题.一般地,若 P 是关于某类空间的一个性质,它不因空间的同构变换而改变,则 P 就是某种不变量,它正是关于该类空间理论的研究对象.类似地,可考虑性质 P 的遗传性、可乘性、在适当映射下的不变性.这些问题在本书的适当位置将要加以考虑.

将拓扑空间依同胚进行等价分类,并将拓扑性质界定为在同胚变换之下保持不变的性质,这原不过是 Klein 著名的**变换群观点**的特殊应用而已.一般地,若对某种数学结构(如拓扑空间)定义了某个等价关系~,也就相应地界定了一种性质,姑且称为"~性质",一个有关该种数学结构的性质 P 属于~性质,当且仅当每个~等价类中的结构同时具有 P 或同时不具有 P. 直观上看来很明显,~等价类愈大,一个~性质就愈有普遍性,这样的性质必然也愈少,因而也愈难发现.拓扑空间的同胚等价类无疑是够宽泛的了.不妨想像一下,在通常平面上与单位圆同胚的图形是何等之多! 而所有这些图形的公共性质理所当然少之又少,这类性质势必非常隐蔽而难以发现,而拓扑学的任务正在于开发强有力的工具来发现通常很隐蔽的拓扑性质.

顺着上述思路推论下去,我们会达到一个更进一步的想法:能否界定一种比一般拓扑性质更具普遍性的性质? 这意味着,我们要对拓扑空间引入一种新的等价分类法,它的等价类比同胚等价类更大.这样的等价就是同伦等价,同伦概念是一个辉煌拓扑理论的出发点.

1.5.12 定义 设 X,Y 是两个拓扑空间.

(i) 设 $f_i \in C(X,Y), i=0,1$. 若存在 $H \in C(J\times X, J), J=[0,1]$, 使得

$$H(i,x)=f_i(x) \qquad (i=0,1, x\in X), \tag{11}$$

则说 f_0 与 f_1 **同伦**,记作 $f_0 \simeq f_1$, 并称 H 为从 f_0 到 f_1 的一个同伦或同伦映射.若 $f_0 \simeq f_1$ 而 f_1 是常值映射,则称 f_0 为**零伦映射**,记作 $f_0 \simeq 0$.

(ii) 若存在映射 $f\in C(X,Y)$ 与 $g \in C(Y,X)$, 使得

$$f\circ g \simeq 1_Y \text{ 且 } g\circ f \simeq 1_X, \tag{12}$$

则说 X 与 Y **同伦等价**,记作 $X\simeq Y$, 且说 f,g 是 X 与 Y 之间的一对同伦等价.

设 H 如定义 1.5.12,令 $H_t(\cdot)=H(t,\cdot)$, 则 $H_t \in C(X,Y)(0\leqslant t\leqslant 1)$, 可将 H_t 看作通过一个连续变化的参数 t (可理解为时间)连续地连接 f_0 与 f_1. 这样的 f_0 与 f_1 应有某些共同性质是理所当然的.

定义 1.5.12 所界定的同伦$\simeq$,确是一种等价关系(试验证之!),因而给出 $C(X,Y)$ 及拓扑空间的等价分类,这样得出的等价类称为**同伦类**.互相同伦等价的映射(或空间)无论外观上如何差异巨大,毕竟存在某些值得注意的共同

性质，对这些性质的揭示与描述正是拓扑学的基本课题.

若将式(12)中的$\simeq$改为等号，则 f 就是从 X 到 Y 的同胚，而 $g = f^{-1}$. 可见同胚是同伦等价的特例，而同伦等价通常未必是同胚. 这就表明，同伦类比同胚等价类更大，因而同伦不变性质必然是拓扑性质，但拓扑性质则未必都是同伦不变性质. 同伦不变性质只是拓扑性质中更特殊、更隐蔽、或许更有趣的一部分.

对于拓扑性质的研究，互相同胚的空间不必区别，因而在每个同胚等价类中只要选取某个最便于考察的空间作为标本就够了. 例如，为研究平面 Jordan 闭曲线，只要研究单位圆周就够了. 同样的思想亦可用到同伦不变性质，为研究这样的性质，互相同伦等价的拓扑空间没有区别，只需在每个同伦类中选取适当的代表就够了.

最简单的拓扑空间无疑是仅由一点构成的空间，那么，由这个"单点空间"所代表的同伦类将包括哪些拓扑空间呢？这是一个初看起来似很平凡但实际上颇有意义的拓扑学问题. 凡同伦等价于单点空间的拓扑空间称为**可缩空间**. 可缩空间类惊人地庞大，其中包括所有拓扑向量空间及任何拓扑向量空间中的凸集. 就同伦不变性质而言，所有这些空间与单点空间并无区别！这个似乎极端的例子表明，适当地运用同伦等价概念能够带来多大的简化.

第 2 章　拓 扑 空 间

在导引性的第 1 章中我们看到，仅仅依靠开集公理这样几条看来很贫乏的假设，就展开了颇为丰富的空间结构，至少已成功地将我们一开始就关注的极限与连续性问题，纳入到一个内在和谐的统一体系之内. 不过，仅仅基于开集公理的拓扑空间理论已不能再走多远了. 如同抽象空间理论中经常所见的，一旦现有公理的推动力开始枯竭，就不得不依赖于引进新的假设. 本章将依次考虑三类基本的假设：分离性、紧性与连通性. 相应地，每类假设界定出一类特殊的拓扑空间，即具某种分离性的空间、紧空间与连通空间. 对于每类空间，我们试图解答的问题是：

(A) 该类空间有哪些等价刻画?

(B) 该类空间是否为遗传的、可乘的与在连续映射下保持的?

(C) 该类空间与其他类型空间有何逻辑联系?

对上述问题的解答构成一系列拓扑命题，其中有些可能比较平凡，有些(如 Tychonoff 定理)则是对整个抽象空间理论都有重大意义的基本结果，其影响远远超出拓扑学之外.

在本章中，X,Y 等表拓扑空间，其拓扑记为 τ_X,τ_Y. 当不致混淆时省去下标. $C(X)$ 总表示 $C(X,\mathbf{R})$.

§2.1　分 离 公 理

1.3.6 所定义的邻域概念可推广到集. 任给 $A\subset X$，令

$$\mathcal{N}_A=\{V\subset X: A\subset V^\circ\},\tag{1}$$

称 $\mathcal{N}_A$ 为集 A 的邻域系，称每个 $V\in\mathcal{N}_A$ 为 A 的邻域. 若对 $A,B\subset X$，有 $U\in\mathcal{N}_A$ 与 $V\in\mathcal{N}_B$，使得 $U\cap V=\varnothing$，则说集 A 与 B 为**邻域分离**，且说 U,V 分离 A,B. 当 U,V 分离 A,B 时显然 U°,V° 亦分离 A,B，因此邻域分离等价于开邻域分离或开集分离. 1.3.9 中提出的条件 T_2，就是说空间中任两相异点可邻域分离. 本节提出类似的分离性条件 $T_i(0\leqslant i\leqslant 6)$，称为**分离公理**. 当 X 满足某个分离公理 T_i 时，就称 X 为 $\boldsymbol{T_i}$ **空间**，或称 X 中的拓扑为 $\boldsymbol{T_i}$ **拓扑**.

A. $T_0\sim T_3$ 空间

2.1.1 定义　(i) 若当 $x,y\in X,x\neq y$ 时必有 $U\in\mathcal{N}_x$ 不含 y，或有 $V\in$

$\mathscr{N}_y$ 不含 x，则说 X 满足分离公理 T_0.

(ii) 若当 $x,y \in X, x \neq y$ 时必有 $U \in \mathscr{N}_x$ 不含 y，则说 X 满足分离公理 T_1.

(iii) 若 X 满足分离公理 T_1，且 X 中任何点与不含该点的闭集可邻域分离，则说 X 满足分离公理 T_3，或称 X 为**正则空间**①.

容易看出 $T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

下面给出的等价刻画使分离公理 $T_i(0 \leqslant i \leqslant 3)$ 的意义更加清楚.

2.1.2 命题 (i) X 是 T_0 空间 $\Leftrightarrow$ 当 $x,y \in X, x \neq y$ 时 $\mathscr{N}_x \neq \mathscr{N}_y$.

(ii) X 是 T_1 空间 $\Leftrightarrow \forall x \in X, \{x\} = \bigcap \mathscr{N}_x \Leftrightarrow \forall x \in X, \{x\}$ 是闭集.

(iii) X 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow X$ 中的收敛网有唯一极限 $\Leftrightarrow$ 对角线 $\Delta \subset X \times X$ 是闭集.

(iv)设 X 是 T_1 空间，则 X 是 T_3 空间 $\Leftrightarrow$ X 中的点与不含该点的闭集可用闭邻域分离 $\Leftrightarrow$ 每个 $x \in X$ 有一个闭邻域基.

证 结论(i)与(ii)的证明是直接的.

(iii)只需证后一个等价性：Δ 是闭集 $\Leftrightarrow$ 当 $(x_t, x_t) \to (x,y)$ 时 $x = y \Leftrightarrow$ 当 $x_t \to x, x_t \to y$ 时 $x = y \Leftrightarrow X$ 是 T_2 空间(用 1.3.9).

(iv)若 X 是 T_3 空间，$A \subset X$ 是闭集，$x \in A^c$，则有开集 U,V 分离 x 与 A；进而又有开集 U_1, V_1 分离 x 与 U^c，于是 $\overline{U}_1$ 与 U^c 即为分离 x 与 A 的闭邻域. 其次，注意到 V 是 x 的开邻域 $\Leftrightarrow x$ 不属于闭集 $A = V^c$，易见 X 是 T_3 空间 $\Leftrightarrow \forall x \in X, x$ 的每个邻域含 x 的一个闭邻域 $\Leftrightarrow$ 每个 $x \in X$ 有一个闭邻域基. □

2.1.3 命题 $T_i(i = 1,2,3)$ 分离性是遗传的与可乘的.

证 遗传性比较明显，仅考虑可乘性. 设 $X_i(i \in I)$ 是一族拓扑空间，$X = \prod X_i$.

(i) 设 $X_i(i \in I)$ 皆为 T_1 空间，则 $\forall x = (x_i) \in X, \{x\} = \prod \{x_i\}$ 是闭集(依 1.5.6(v))，因而 X 是 T_1 空间(用 2.1.2(ii)).

(ii) T_2 分离性是可乘的已见于 1.5.6(iv).

(iii) 设 $X_i(i \in I)$ 皆为 T_3 空间，则 X 是 T_1 空间. 取定 $x = (x_i) \in X$，今证 x 有一闭邻域基. 给定 x 的一个形如 §1.5(3)的开邻域，取 x_{i_k} 的闭邻域 A_k，使 $A_k \subset B_k(1 \leqslant k \leqslant n)$，则

---

① 有些文献所说的 T_3 空间并不要求满足 T_1 分离性，因而 T_3 分离性弱于正则性；另一些文献的说法则恰好相反. 对于下面考虑的 $T_i\left(3\frac{1}{2} \leqslant i \leqslant 6\right)$亦有类似情况. 鉴于通常主要运用 T_2 空间，这些定义上的差异并不特别重要.

$$A \triangleq \prod_{k=1}^{n} A_k \times \prod_{i \neq i_1,\cdots,i_n} X_i \subset \prod_{k=1}^{n} B_k \times \prod_{i \neq i_1,\cdots,i_n} X_i,$$

A 是 x 的闭邻域(用 1.5.6(v)). 这表明 x 有闭邻域基. □

设 $X=\{0,1\}$，则 X 依平凡拓扑不是 T_0 空间，X 依拓扑 $\tau=\{X,\varnothing,\{0\}\}$ 是 T_0 而非 T_1 空间. 非 T_2 的 T_1 空间的例子见 2.5.1，非 T_3 的 T_2 空间的例子见 2.5.5.

B. 全正则空间

首先给出函数分离的一般概念. 设 $F \subset C(X)$，$A,B \subset X$. 若存在 $f \in F$，使得

$$f(A)=\alpha \neq \beta = f(B), \tag{2}$$

则说 F 或 f 分离 A 与 B. 当 $C(X)$ 分离 A 与 B 时说 A 与 B **可函数分离**. 注意，若(2)满足，令 $g=(f-\alpha)/(\beta-\alpha)$，则 $g \in C(X)$，$g(A)=0$，$g(B)=1$；进而令 $h=(g \vee 0) \wedge 1$，则 $h \in C(X,J)$，$J=[0,1]$，$h(A)=0$，$h(B)=1$. 因此，$C(X)$ 分离 A 与 $B \Leftrightarrow \exists f \in C(X,J)$，使 $f(A)=0$，$f(B)=1$. $C(X)$ 分离 x_0 与 B 的条件更宽些：只要存在 $f \in C(X)$，使

$$f(x_0) \overline{\in} \overline{f(B)}. \tag{3}$$

事实上，由(3)推出有 $\delta>0$，使

$$(y_0-\delta,y_0+\delta) \cap f(B)=\varnothing, \qquad y_0=f(x_0),$$

取 $\varphi \in C(\mathbf{R},J)$，使 $\varphi(y_0)=0$，在 $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 外 $\varphi(y)=1$，则 $g=\varphi \circ f \in C(X,J)$，$g(x_0)=0$，$g(B)=1$.

对 $A,B \subset X$ 与 $f \in C(X)$ 约定以下常用记号：

$$A \subset\subset B \Leftrightarrow \bar{A} \subset B^{\circ} \qquad \text{(强包含)}; \tag{4}$$

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x: f(x) \neq 0\}} \qquad \text{(支集)}; \tag{5}$$

$$A \prec f \Leftrightarrow f \in C(X,J) \text{ 且 } f(A)=1; \tag{6}$$

$$f \prec B \Leftrightarrow f \in C(X,J) \text{ 且 } \operatorname{supp} f \subset\subset B. \tag{7}$$

由 Rudin 倡用的记号 $\prec$，被证明是特别简便而有效的. 若 $\exists f \in C(X)$，使 $A=f^{-1}(0)$，则称 A 为**零集**，称 A^c 为**余零集**. 可直接证明如下引理.

2.1.4 引理 设 $A \subset X$，则 A 是零集 $\Leftrightarrow \exists f \in C(X)$，$r \in \mathbf{R}$，使 $A=\{f \leqslant r\}$ 或 $A=f^{-1}(r)$；A 是**余零集** $\Leftrightarrow \exists f \in C(X)$，$r \in \mathbf{R}$，使 $A=\{f<r\} \Leftrightarrow \exists f \in C(X,J)$，使 $A=\{f<1\}$ 或 $A=\{f>0\}$.

2.1.5 定义 若 X 是 T_2 空间，其中任一点与不含该点的闭集可函数分离，则称 X 为**全正则空间**(或 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间、Tychonoff 空间).

构成本书主要讨论对象的一致空间、度量空间与拓扑向量空间都是全正则空间，这就注定了全正则空间的重要性.

2.1.6 定理　对于 T_2 空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是全正则空间；

(ii) $\forall x \in X, V \in \mathcal{N}_x, \exists f \in C(X)$，使得 $\{x\} \prec f \prec V$；

(iii) X 有由余零集构成的拓扑基；

(iv) 存在 $F \subset C(X,J)$，使以下赋值映射是拓扑嵌入：

$$e: X \to J^F, \qquad x \to (f(x))_{f \in F}. \tag{8}$$

证　(i)⇒(ii)⇒(iii)的证明是平凡的.

(iii)⇒(iv). 取 $F = C(X,J)$. 由 T_2 分离性及条件(iii)推出 F 分离 X 中的点，因此(8)是单射. 由 1.5.6(iii)知 $e(\cdot)$ 连续. 若 $\{x_t\} \subset X, x_t \not\to x \in X$，则由条件(iii)有余零集 V，使 $x \in V$，对 $\{x_t\}$ 的某个共尾子网 $\{x_{t'}\}$ 有 $x_{t'} \overline{\in} V$. 取 $f \in F$ 使 $V = \{f < 1\}$，则显然不能有 $f(x_t) \to f(x)$. 这表明(8)为拓扑嵌入.

(iv)⇒(i). 设 $B \subset X$ 是闭集，$x_0 \in B^c$. 利用拓扑嵌入(8)，可得 x_0 的邻域 $U \subset B^c$，

$$U = \{x \in X: | f_i(x) - f_i(x_0) | < \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant n)\},$$

其中 $f_i \in F (1 \leqslant i \leqslant n), \varepsilon > 0$. 令

$$f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | f_i(x) - f_i(x_0) |,$$

则 $f \in C(X), f(x_0) = 0, f(B) \geqslant \varepsilon$，故条件(3)满足，从而 x_0 与 B 可函数分离. 因此 X 是全正则的. □

2.1.7 命题　全正则性是遗传的与可乘的.

证　遗传性可直接利用定义 2.1.5 证明，仅证可乘性. 设 $X_i (i \in I)$ 是一族全正则空间，$X = \prod X_i, P_i: X \to X_i$ 是投影. 注意到 $\forall f_i \in C(X_i, J)$，有 $f \triangleq f_i P_i \in C(X,J)$，利用 2.1.6(iv)不难验证，赋值映射

$$X \to J^F, \qquad x \to (f(x))_{f \in F}$$

是一拓扑嵌入，其中 $F = C(X,J)$. 因此 X 是全正则的. □

2.1.8 定理 (Tychonoff　1930)　X 是全正则的⇔存在非空集 Ω，使 $X \subset J^\Omega$，此处 $\subset$ 表拓扑嵌入(下同)；X 是第二可数的全正则空间 ⇔$X \subset J^\omega$，ω 表无限可数集.

后一结论表明，J^ω 是第二可数全正则空间的**万有空间**①.

证　首先，由 2.1.7 推出，J^Ω 的任何子空间是全正则的，J^ω 的任何子空间是第二可数的全正则空间(用 1.5.11).

---

① 若空间 X 具有性质 P，且任何有性质 P 的空间均可嵌入 X，则称 X 为有性质 P 的空间的万有空间.

反之,若 X 是全正则的,则由 2.1.6(iv)有 $X\subset J^{\Omega}$,$\Omega\subset C(X,J)$. 若 X 是第二可数的全正则空间,则它有由余零集组成的可数拓扑基 $\{B_n\}$ (用 2.1.6(iii),1.3.4). 取 $f_n\in C(X,J)$,使 $B_n=\{f_n>0\}$(用引理 2.1.4),令 $F=\{f_n\}$,则如同证 2.1.6 一样可指明赋值映射(8)是拓扑嵌入,因此 $X\subset J^{\omega}$. □

J^{Ω} 称为 **Ω 维方体**,它有足够好的拓扑性质(例如,J^{Ω} 是紧正规空间,J^{ω} 是紧度量空间,参看 2.2.3 与 3.3.8),其中有些性质可传递给全正则空间.

C. 正规空间

2.1.9 定义 若 X 是 T_2 空间,其中任一对互不相交的闭集可邻域分离,则称 X 为**正规空间或 T_4 空间**.

正规空间有一系列形式上很不相同的刻画,其中一些刻画还是颇著名的拓扑定理. 下面给出这类结果的一部分,另一些将在 §2.4B 中给出.

2.1.10 定理 对于 T_2 空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是正规空间;

(ii) $A\subset\subset B\subset X\Rightarrow\exists C\subset X$,使 $A\subset\subset C\subset\subset B$,且可设 C 为开集;

(iii) $A\subset\subset B\subset X\Rightarrow\exists f\in C(X):A\prec f\prec B$;

(iv) 若 $A\subset X$ 是闭集,$f\in C(A)$,则 f 可扩张为 $g\in C(X)$,使得 $\sup\limits_{x\in A}|f(x)|=\sup\limits_{x\in X}|g(x)|$.

证 (iv)⇒(iii)⇒(ii)⇔(i)的证明并不难,不予考虑.

(ii)⇒(iii). 若 $A\subset\subset B$,则重复应用条件(ii)推出:任给 $r=k2^{-n}$,$k=1,2,\cdots,2^n-1$,$n=1,2,\cdots$,存在 $B_1\subset X$ 与开集 A_r,使得当 $r<r'$ 时 $A\subset\subset A_r\subset\subset A_{r'}\subset\subset B_1\subset\subset B$. 约定 $A_1=X$,令 $g(x)=\inf\{r>0:x\in A_r\}$,则 $g(A)=0$,$g(B_1^c)=1$. 不难验证:

$$\{g<\beta\}=\begin{cases}\varnothing, & \beta\leqslant 0,\\ \bigcup\limits_{r<\beta}A_r, & 0<\beta\leqslant 1,\\ X, & \beta>1,\end{cases}$$

$$\{g\leqslant\beta\}=\begin{cases}\varnothing, & \beta<0,\\ \bigcap\limits_{r>\beta}\overline{A}_r, & 0\leqslant\beta<1,\\ X, & \beta\geqslant 1,\end{cases}$$

故 $g\in C(X)$ (用 1.3.16(v)). 于是 $f=1-g$ 合于条件(iii)之要求.

(iii)⇒(iv) 只考虑 $\|f\|_A\triangleq\sup\limits_{x\in A}|f(x)|<\infty$ 的情况(对一般情况仅需附加适当连续变换),不妨设 $\|f\|_A=1$. 令 $B_{\pm}=f^{-1}[\pm 1/3,1]$,则由条件(iii)有 $g_1\in C(X)$,使 $g_1(B_{\pm})=\pm 1/3$,且

$$\| g_1 \| \triangleq \sup_{x\in X} | g_1(x) | \leqslant 1/3,$$

从而 $\| f - g_1 \|_A \leqslant 2/3$. 设已作出 $\{g_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C(X)$，使得

$$\| g_i \| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}, \qquad \left\| f - \sum_{i=1}^{n} g_i \right\|_A \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n, \tag{9}$$

则

$$\varphi \triangleq \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(f - \sum\nolimits_1^n g_i\right) \in C(A), \qquad \| \varphi \|_A \leqslant 1.$$

于是又有 $\psi \in C(X)$，使得 $\|\psi\| \leqslant 2/3$, $\| \varphi - \psi \|_A \leqslant 2/3$. 令 $g_{n+1} = (2/3)^n \psi$，则以 $n+1$ 代 n 后(9)仍保持成立. 这就归纳地作出满足(9)的序列 $\{g_n\} \subset C(X)$. 由(9)直接推出

$$g \triangleq \sum\nolimits_1^\infty g_n \in C(X), \qquad g \mid A = f, \qquad | g | \leqslant 1. \qquad \square$$

定理 2.1.10 中的(iii)与(iv)是对正规性的最重要的刻画，二者分别以 **Urysohn 定理**(1925)与 **Tietze 定理**(1923)著称. (iii)显然相当于：X 中任何两个互不相交的闭集可函数分离. 2.1.10 断言："连续函数分离闭集"等价于"闭集上的连续函数可扩张为全空间上的连续函数"，这是一个富有启发性的深刻结论，我们将这简单地说成"函数分离等价于连续函数可扩张". 表面上看，"闭集可函数分离"与"闭集上的连续函数有连续扩张"似乎并不相关，而实际上却被证明是一回事. 在 §4.3 中将对局部凸空间中的连续线性泛函建立类似结论.

2.1.10(iii)表明 $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$. 非正规的全正则空间的例子见 2.5.7.

与 $T_i (i \leqslant 3\frac{1}{2})$ 分离性不同，正规性既不是遗传的，也不是可乘的. 不过容易看出，正规性是闭遗传的.

正则性严格地弱于正规性. 但对于第二可数空间而言，正则性与正规性是等价的.

2.1.11 定理　设 X 是第二可数的正则空间，则 X 是正规的.

证　设 $A, B \subset X$ 是互不相交的闭集. 取 X 的可数拓扑基 $\mathscr{B}$，令

$$\mathscr{U} = \{U \in \mathscr{B} : A \cap U \neq \varnothing, \bar{U} \subset B^c\},$$

则 $\mathscr{U}$ 可数，记为 $\{U_n\}$. 由 X 的正则性推出 $A \subset \bigcup U_n$. 同理，有一列开集 $\{V_n\}$，使得 $B \subset \bigcup V_n$, $\bar{V}_n \subset A^c$. 令

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i\right), \qquad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i\right),$$

则易验证 U 与 V 分离 A 与 B. 故 X 是正规的. $\square$

D. $T_5 \sim T_6$ 空间

2.1.12 定义　若 X 的每个子空间是正规的，则称 X 为 **T_5 空间或全正规**

空间;若 X 是 T_2 空间且其中的闭集皆为零集,则称 X 为 $\boldsymbol{T_6}$ **空间或完正规空间.**

2.1.13 定理(Urysohn) 设 X 是 T_2 空间,则 X 是 T_5 空间 $\Leftrightarrow X$ 中任何互相隔离的两集可邻域分离,A 与 B 互相隔离意味着

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing.$$

证 若 X 是 T_5 空间,$A,B \subset X$ 互相隔离,则在 X 的开子空间 $M = (\overline{A} \cap \overline{B})^c$ 中 $\overline{A}\backslash\overline{B}$ 与 $\overline{B}\backslash\overline{A}$ 是互不相交的闭集,于是有开集 $U,V \subset M$ 分离 $\overline{A}\backslash\overline{B}$ 与 $\overline{B}\backslash\overline{A}$,可验证 U 与 V 即分离 A 与 B.

反之,若 X 中互相隔离的两集可邻域分离,$M \subset X$,A,B 是 M 中互不相交的相对闭集,则可验证 A,B 互相隔离,因而可邻域分离. 这表明 X 是 T_5 空间. □

2.1.14 定理 对于 T_2 空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是 T_6 空间;

(ii) 任给互不相交的非空闭集 $A,B \subset X$,有 $f \in C(X)$,使得 $A = f^{-1}(0)$ 且 $B = f^{-1}(1)$;

(iii) X 是正规空间且其中每个闭子集为 G_δ 集.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii). 若 X 是 T_6 空间,$A,B \subset X$ 是互不相交的非空闭集,则有 $g,h \in C(X,J)$,使得 $A = g^{-1}(0)$,$B = h^{-1}(0)$ (用 2.1.12 与 2.1.4). 于是 $f = g/(g+h) \in C(X)$,$A = f^{-1}(0)$,$B = f^{-1}(1)$. 反之,设条件(ii)满足,$A \subset X$ 是闭集,可设 $A \neq X,\varnothing$,取 $x_0 \in A^c$,将条件(ii)用于 A 与 $\{x_0\}$ 得出 A 为零集,故 X 是 T_6 空间.

已证结论表明 $T_6 \Rightarrow T_4$.

(i)$\Leftrightarrow$(iii). 若 X 是 T_6 空间,$A \subset X$ 是闭集,则有 $f \in C(X)$,使得 $A = f^{-1}(0)$. 于是 $A = \bigcap\{|f| < 1/n\}$ 是 G_δ 集,故条件(iii)满足. 反之,设条件(iii)满足,$A \subset X$ 是闭集,则有开集 $G_n \subset X(n \in \mathbf{N})$ 使得 $A = \bigcap G_n$. 依 2.1.10(iii)有 $f_n \in C(X)$,使得 $A < f < G_n(n \in \mathbf{N})$. 令 $f = \sum_1^\infty 2^{-n} f_n$,则 $f \in C(X,J)$,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow f_n(x) = 1(\forall n \in \mathbf{N}) \Leftrightarrow x \in G_n(\forall n \in \mathbf{N}),$$

故 $A = f^{-1}(1)$ 为零集. 这表明 X 是 T_6 空间. □

显然 $T_5 \Rightarrow T_4$. 其次显然 T_6 是遗传的,而 $T_6 \Rightarrow T_4$,故 $T_6 \Rightarrow T_5$.

2.1.15 命题 T_4,T_5 与 T_6 分离性在连续闭满射下保持.

证 设 $F: X \to Y$ 是连续闭满射.

(i) "X 是 T_4 空间 $\Rightarrow Y$ 是 T_4 空间"之证是直接的.

(ii) 设 X 是 T_5 空间,$\varnothing \neq B \subset Y$,则 $A \triangleq F^{-1}B$ 作为 X 的子空间是 T_4

空间，而 $F|A:A\to B$ 是连续闭满射，因而 B 是 T_4 空间，于是 Y 是 T_5 空间.

(iii) 设 X 是 T_6 空间，则 Y 是 T_4 空间. 若 $B\subset Y$ 是闭集，则 $A\triangleq F^{-1}B\subset X$ 是闭集，因而有 $f\in C(X,J)$，使 $A=f^{-1}(0)$. 于是

$$B=(FA^c)^c=\left[F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\geqslant 1/n\}\right)\right]^c$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}(F\{f\geqslant 1/n\})^c\triangleq\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

是 G_δ 集，故由 2.1.14 知 Y 是 T_6 空间. □

若 X 是度量空间，$A\subset X$ 是闭集，$f(x)=d(x,A)$，则 $f\in C(X)$，$A=f^{-1}(0)$. 可见 X 是 T_6 空间，因而具有本节所有的分离性结论. 基于分离公理的空间分类，对于度量空间并无意义.

§2.2　紧性与局部紧性

确立某种极限的存在性，在分析数学的各个领域都是经常要考虑的重要问题. 这类问题的解决通常依赖于某个抽象空间的紧性或完备性，紧性正是本节要考虑的.

A. 紧性

若 $\mathscr{A}\subset 2^X$，$A\subset\mathscr{A}^\sigma$，则称 $\mathscr{A}$ 为 A 的一个覆盖. 当 $\mathscr{A}\subset\tau_X$ 且 $\mathscr{A}$ 覆盖 A 时称 $\mathscr{A}$ 为 A 的开覆盖，闭覆盖的意义自明. 若 $\mathscr{A}$ 覆盖 A 且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$，则称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的子覆盖. 若指标集 I 是全序集，$i\leqslant j\Rightarrow A_i\subset A_j$，则称集族 $\{A_i:i\in I\}$ 为**集套**. 非空集的集套显然是有限相交的.

2.2.1 定义　若拓扑空间 X 的每个开覆盖有有限个子覆盖，则称 X 为**紧空间**. 若 $A\subset X$ 作为子空间是紧的，则称 A 为**紧集**；若 $A\subset X$，$\bar{A}$ 是紧集，则称 A 为**相对紧集**.

紧空间概念是 Alexandroff 与 Urysohn 于 20 世纪 20 年代初引进的，它无疑得到经典有限覆盖定理的启示. 不妨说，紧空间就是满足有限覆盖定理的空间. $A\subset X$ 为紧集可直接刻画为：A 在 X 中的任何开覆盖有有限子覆盖. 鉴于通过考虑相对拓扑总可以将关于紧空间的结论用于紧集，故下面主要考虑紧空间.

对于紧性概念的方便运用，熟悉紧性的各种刻画是重要的. 下面的定理汇集了主要的结论.

2.2.2 定理　对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是紧空间；

(ii) X 中任何有限相交的闭集族有非空交；

(iii) 若 $\mathscr{B}\subset 2^X$ 是闭集族，$\bigcap\mathscr{B}\subset G\in\tau_X$，则有 $B\in\mathscr{B}^*$（记号见§1.1(2)），使 $B\subset G$；

(iv) 由子基开集作成的 X 的覆盖必含有限子覆盖；

(v) X 中非空闭集的套必有非空交；

(vi) X 中任何网有收敛子网.

证　(i)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i)⇒(iv)与(ii)⇒(v)的证明是直接的，不予考虑. 余下只要证(iv)⇒(i)，(v)⇒(ii)与(ii)⇔(vi).

(iv)⇒(i). 设 X 非紧，则有不含有限子覆盖的极大开覆盖 $\mathscr{A}$(用极大原理1.1.6). 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑子基，令 $\mathscr{U}=\mathscr{A}\cap\mathscr{B}$，今证明 $\mathscr{U}^\sigma=X$（从而条件(iv)必不满足）. $\forall x\in X$，取 $A\in\mathscr{A}$，使 $x\in A$，取有限子族 $\{B_i\}\subset\mathscr{B}$，使 $x\in\bigcap B_i\subset A$，则必有某个 $B_i\in\mathscr{A}$（从而 $x\in B_i\in\mathscr{U}$）. 否则，由 $\mathscr{A}$ 的极大性，$\forall i$，有有限子族 $\mathscr{A}_i\subset\mathscr{A}$，使 $\mathscr{A}_i\cup\{B_i\}$ 覆盖 X，于是

$$X=\bigcap_i(B_i\cup\mathscr{A}_i^\sigma)=(\bigcap_i B_i)\cup(\bigcup_i\mathscr{A}_i^\sigma)$$
$$=A\cup(\bigcup_i\mathscr{A}_i^\sigma),$$

这与 $\mathscr{A}$ 不含有限子覆盖相矛盾.

(v)⇒(ii). 设 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是有限相交的闭集族，$\bigcap\mathscr{A}=\varnothing$，可设 $\mathscr{A}$ 的基数 α 是最小的. 令 $\mathscr{A}=\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$，$\beta$ 是序数，$B_\beta=\bigcap_{\gamma<\beta}A_\gamma$，则 $\{B_\beta\}_{\beta<\alpha}$ 是非空闭集的套，$\bigcap B_\beta=\bigcap A_\beta=\varnothing$，这表明条件(v)不能满足.

(ii)⇒(vi). 设 $\{x_t\}\subset X$ 是一个网，令 $A_t=\{x_s: s\geqslant t\}$，则 $\{\bar{A}_t\}$ 是有限相交闭集族，于是由条件(ii)有 $x\in\bigcap\bar{A}_t$. $\forall U\in\mathscr{N}_x$，$\forall t$，取 $s\geqslant t$，使 $x_s\in U$. 令 $\delta=(s,U)$，$t_\delta=s$，约定 $\delta\leqslant\delta'=(s',U')\Leftrightarrow s\leqslant s'$，且 $U\supset U'$，则 $\{x_{t_\delta}\}$ 是 $\{x_t\}$ 的一个子网(参考§1.3C)，直接看出 $x_{t_\delta}\to x$.

(vi)⇒(ii). 设 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是有限相交的闭集族，不妨设 $\mathscr{A}=\mathscr{A}^*$. $\forall A\in\mathscr{A}$，取 $x_A\in A$，则当 $\mathscr{A}$ 以 $\supset$ 为序时 $\{x_A: A\in\mathscr{A}\}$ 是一个网. 若 $\{x_A\}$ 的某个子网收敛于 x，则必定 $x\in\bigcap\mathscr{A}$. □

在定理 2.2.2 中，条件(v)似乎是经典的区间套定理的推广，而(vi)则可看作关于闭区间的 Bolzano-Weierstrass 聚点原理[①]的一般化. 因此可以说，在拓扑空间这种高度抽象的框架内，通过定理 2.2.2 实现了有限覆盖定理、区间套定理与聚点原理的某种统一.

顺便指出，为最大限度地推广某条分析定理，常常引导到界定一类空间.

---

① 即"每个有界序列必有收敛子列". 序列 $\{x_n\}$ 的子列之极限称为 $\{x_n\}$ 的聚点. 相应地，一个网 $\{x_t\}$ 的子网之极限称为 $\{x_t\}$ 的聚点. 因此，2.2.2(vi)相当于说，X 中任何网有聚点. 这显示出它是 Bolzano-Weierstrass 聚点原理的推广.

这在抽象空间理论中已成为一条颇具普遍性的思考规则. 人们总希望将那些熟悉且有广泛应用的分析定理(如有限覆盖定理)推广于很一般的空间. 但在仔细考察之后往往发现,一条老定理在新的意义下的应用是有条件的. 于是人们就界定出一类空间,使得该类空间正好是那些适于应用某条熟知定理的空间. 于是,一类新的空间就诞生了. 本章所考虑的紧空间、序列紧空间与连通空间,以及第 3 章将考虑的完备空间等,都属于这种情况.

2.2.3 定理　(i) 紧空间的闭子集是紧集, T_2 空间的紧集是闭集.

(ii) 紧空间的积空间是紧空间.

(iii) 连续映射映紧集为紧集.

综合以上结论得出:紧性是闭遗传的、可乘的、在连续映射下保持不变,其中最重要的无疑是可乘性,它以 **Tychonoff 定理**(1930)著称,可以说是整个数学中最重大的结果之一.

证　应用 2.2.2(vi),结论(i)与(iii)的证明是很直接的,至于(ii)的证明,原则上不可避免要使用某种超限程序,因而远不是平凡的. 不过,利用 2.2.2(iv),这一证明已变得比较容易,可以说,关键性的障碍已在 2.2.2(iv)的证明中扫除了.

设 $(X_i,\tau_i)(i\in I)$ 是一族紧空间, $X=\prod X_i$, $P_i:X\to X_i$ 是投影, $\mathscr{B}\subset\bigcup P_i^{-1}\tau_i$, $\mathscr{B}$ 覆盖 X. 令 $\mathscr{B}_i=P_i\mathscr{B}$, 则必有某个 $\mathscr{B}_i$ 覆盖 X_i. 否则, $\forall i\in I$, $\exists x_i\in X_i\backslash\mathscr{B}_i^{\#}$, 令 $x=(x_i)$, 取 $B\in\mathscr{B}$, 使 $x\in B$. 设 $B=P_i^{-1}B_i$, $B_i\in\tau_i$, 则 $x_i\in P_iB\in\mathscr{B}_i$, 得出矛盾. 取定 $i\in I$, 使 $X_i=\mathscr{B}_i^{\#}$; 取有限子族 $\mathscr{A}_i\subset\mathscr{B}_i$ 覆盖 X_i, 则 $P_i^{-1}\mathscr{A}_i$ 是 $\mathscr{B}$ 的有限子覆盖. □

定理 2.2.3 有一系列有价值的推论,为便于应用,将其汇集于下.

2.2.4 推论　(i) 紧空间上的实连续函数取得最大最小值.

(ii) 若 $F\in C(X,Y)$, X 是紧空间, Y 是 T_2 空间,则 F 是闭映射,因而当 F 是连续双射时必为同胚.

(iii) 若 τ 与 τ_1 分别为 X 上的紧拓扑与 T_2 拓扑, $\tau\supset\tau_1$, 则必 $\tau=\tau_1$.

(iv) 设 X 是紧空间, $Y_i(i\in I)$ 是一族 T_2 空间, $f_i\in C(X,Y_i)$, $F=\{f_i\}$ 分离 X 中的点,则 X 中的拓扑必为 F 生成的拓扑(依 1.5.3). 特别,若 $F\subset C(X,Y)$ 分离 X 中的点, Y 是 T_2 空间,则如下赋值映射是拓扑嵌入(对照 §1.5(5),(6))

$$e:X\to Y^F,\qquad x\to(f(x))_{f\in F}.\tag{1}$$

(v) 设 $X_i(i\in I)$ 是一族紧 T_2 空间, $X=\prod X_i$, $P_i:X\to X_i$ 是投影. 若 τ 是 X 上使得 P_i 皆连续的 T_2 拓扑,则 τ 必非紧拓扑,除非 τ 就是积拓扑.

证　(i) 由 2.2.3(iii)推出,(ii)由 2.2.3(i)(iii)推出,由(ii)推出(iii),结

合(iii)与 1.5.4,1.5,6 推出(iv)与(v). □

2.2.4(i)推广了熟知的分析定理:闭区间上的连续函数有界. 不过这一定理的推广形式的适用范围较紧空间为广. 准确的表述是引进所谓**伪紧空间**,即其上的实连续函数均有界的拓扑空间. 于是 2.2.4(i)意味着:紧空间是伪紧的,而逆命题则未必成立.

2.2.4(v)表明,为使投影连续且 Tychonoff 定理成立(这两者都是难以舍弃的),在积空间中除了使用定义 1.5.5 意义下的积拓扑之外,别无选择. 这就令人信服地证实了积拓扑定义的合理性.

应用紧性的一种典型方式是:若命题 P 局部地成立(这意味着在每点的一个邻域内成立),则必在紧集上成立. 下面考虑一个典型例子.

2.2.5 定理(Wallace) 设 X,Y 是拓扑空间,$A\subset X$ 与 $B\subset Y$ 是紧集,W 是 $A\times B$ 在 $X\times Y$ 中的邻域,则有 $U\in\mathcal{N}_A,V\in\mathcal{N}_B$,使 $U\times V\subset W$.

当 A,B 是单点集时,以上结论平凡地成立. 直观地说,因紧集如此"紧密",以至其特性已接近于点,因而对点成立的命题亦可推广到以**紧集代点**的情况. 这是紧集发挥作用的重要方式之一.

证 任给 $(a,b)\in A\times B$,取 (a,b) 的开邻域 $U_{ab}\times V_{ab}\subset W$. 固定 $a\in A$,由 B 的紧性有有限集 $\{b_j\}\subset B$,使 $B\subset\bigcup_j V_{ab_j}\triangleq V_a$. 令 $U_a=\bigcap_j U_{ab_j}$,则 $\{a\}\times B\subset U_a\times V_a\subset W$. 然后取有限集 $\{a_i\}\subset A$,使 $A\subset\bigcup_i U_{a_i}\triangleq U$,令 $V=\bigcap_i V_{a_i}$,则 U 与 V 显然合乎定理要求. □

2.2.6 推论 紧 T_2 空间是正规空间,X 是全正则空间 $\Leftrightarrow X$ 可拓扑嵌入一个紧 T_2 空间并在其中稠密.

证 若 A,B 是紧 T_2 空间 X 中互不相交的闭集,则对 A,B 与 $W=\Delta^c$(Δ 是对角线)用 2.2.5 得出 A,B 可邻域分离.

若 X 是全正则空间,则可设 $X\subset J^\Omega$(2.1.8),X 在 J^Ω 中的闭包是紧 T_2 空间(用 2.2.3(i)(ii)). □

B. 可数紧与序列紧

2.2.7 定义 若 X 的任何可数开覆盖有有限子覆盖,则称 X 为**可数紧空间**;若 X 中任何序列有收敛子列,则称 X 为**序列紧空间**;若 X 中任何无限集有聚点,则称 X 为**聚点紧空间**.

可数紧集、序列紧集等的意义是自明的.

以下命题形式上颇类似于 2.2.2,但在"可数"情况下其证明要容易得多.

2.2.8 命题 对拓扑空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是可数紧的;

(ii) 若 $B_n\subset X(n\in\mathbf{N})$ 是有限相交的闭集,则 $\bigcap B_n\neq\varnothing$;

(iii) 若 $B_n \subset X(n \in \mathbf{N})$ 是闭集，$\bigcap B_n \subset G \in \tau_X$，则 $\exists n \in \mathbf{N}$，使 $\bigcap_1^n B_i \subset G$.

(iv) 若 $\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，则 $\bigcap B_n \neq \varnothing$.

当取 X 为闭的实区间时，由实数理论熟知，2.2.7 所定义的三种紧性条件皆满足且可互相推出. 现在指明，在附加一定条件的拓扑空间中，能证明同样的等价关系.

2.2.9 定理　(i) 序列紧空间是可数紧的，可数紧的第一可数空间是序列紧的.

(ii) 可数紧空间是聚点紧的，聚点紧的 T_1 空间是可数紧的.

综合以上结论得出：对于第一可数的 T_1 空间(如度量空间)，序列紧、可数紧与聚点紧三者互相等价. 顺便指出，对于度量空间紧与序列紧一致(详见 3.2.3).

证　(i) 若 X 是序列紧的，$\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，任取 $x_n \in B_n$，则有子列 $x_{n_k} \to x$，显然 $x \in \bigcap B_n$. 故 X 是可数紧的(用 2.2.8(iv)). 反之，若 X 是可数紧的第一可数空间，而某个序列 $\{x_n\} \subset X$ 无收敛子列，则 $A_n \triangleq \{x_k : k \geqslant n\} (n \in \mathbf{N})$ 是闭集的降列(断言 A_n 为闭集用到第一可数性!)而 $\bigcap A_n = \varnothing$，得出矛盾. 故 X 必是序列紧的.

(ii) 设 X 可数紧，$A \subset X$ 是无限集，不妨设 $A = \{x_n\}$. 若 $A' = \varnothing$，则 $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ 是闭集，而 $\bigcap A_n = \varnothing$，得出矛盾. 故 X 必为聚点紧. 反之，设 X 是聚点紧的 T_1 空间，$\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，可设 $B_n \neq B_{n+1} (\forall n \in \mathbf{N})$，取 $x_n \in B_n \backslash B_{n+1}$，则 $A \triangleq \{x_n\}$ 是无限集，于是有 $x \in A'$. 必定 $x \in \bigcap B_n$. 否则有 $n \in \mathbf{N}$，使 $x \overline{\in} B_n$. 另一方面，$\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ 是闭集(T_1 性用于此!). 于是

$$U \triangleq \{x\} \cup (B_n^c \backslash \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}) \in \mathcal{N}_x,$$

$U \cap (A \backslash \{x\}) = \varnothing$，这与 $x \in A'$ 相矛盾. 故 X 是可数紧的.　□

C. 局部紧性

紧拓扑空间并不具有普遍性. 例如，任何实开区间都不是紧的. 不过，对于局部问题，只要是“局部紧”的空间，就同样能利用紧性的诸多好处. 现在就来考察这种空间.

2.2.10 定义　若拓扑空间 X 中每点有一紧邻域，则称 X 为**局部紧空间**. 局部紧的 Hausdorff 空间缩写为 LCH.

亦有文献将局部紧空间定义为每点有紧邻域基的拓扑空间，但这是一个实质上更强的概念. 不过，如下面就要指明的，对于 T_2 空间，这两种局部紧性的定义并无区别.

LCH 比紧空间要广泛得多. 首先, $\mathbf{R}^n$ 及其中的任何开集都是 LCH. 更一般地,在现代数学中处于重要地位的(有限维)拓扑流形都是 LCH. 因此, LCH 的一些良好性质特别令人注意.

2.2.11 定理 设 X 是 LCH,则以下结论成立:

(i) X 的相对紧开子集构成拓扑基.

(ii) 每点 $x \in X$ 有一紧邻域基.

(iii) X 中相对紧的余零集构成拓扑基,因而 X 是全正则空间.

证 取定 $x \in X$ 及 x 的紧邻域 B, 任给 x 的开邻域 V. B 作为 X 的子空间是正规的(用 2.2.6). 令 $W \triangleq B^\circ \cap V$, 取 $f \in C(B)$, 使 $f(x) = 0, f(B \backslash W) = 1$. 补充定义 $f \mid B^c = 1$, 则 f 在闭集 B 与 W^c 上连续,因而 $f \in C(X)$ (用 1.3.16(iv)). 因 f 分离 x 与 V^c, 故 X 是全正则空间. 由 2.1.6(iii),有余零集 U, 使 $x \in U \subset W$. $\bar{U}$ 作为 B 的闭子集是紧的,故 U 相对紧且 $U \subset V$. 这就证得(iii),而(iii)⇒(i)⇒(ii). □

2.2.11 表明,LCH 局部是正规的,因而可局部地应用正规空间的结论. 这就不难理解,以下结果与定理 2.1.10 具有高度类似的形式.

2.2.12 定理 设 X 是 LCH, $A \subset X$ 为紧集,则以下结论成立:

(i) $A \subset\subset B \subset X \Rightarrow$ 存在紧集 K, 使得 $A \subset\subset K \subset\subset B$.

(ii) $A \subset\subset B \subset X \Rightarrow \exists f \in C_0(X)$, 使得 $A \prec f \prec B$, 其中

$$C_0(X) = \{f \in C(X): \operatorname{supp} f \text{ 为紧集}\}. \tag{2}$$

(iii) 若 $f \in C(A)$, 则 f 可扩张为 $g \in C_0(X)$, 使得

$$\sup_{x \in A} |f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

证 (i) $\forall x \in A$, 取 x 的紧邻域 $K_x \subset B^\circ$. 因 A 紧,故有有限集 $\{x_i\} \subset A$, 使 $A \subset \bigcup K^\circ_{x_i}$, $K = \bigcup K_{x_i}$ 即合于所求.

(ii) 设 K 依(i),则对 K 应用 2.1.10(iii)得 $f \in C(K)$, 使 $A \prec f \prec K^\circ$. 补充定义 $f \mid K^c = 0$, 则 f 即合于所求.

(iii) 仍设 K 依(i),可设 $f \in C(K)$ (用 2.1.10(iv)). 由已证的(ii)有 $\varphi \in C(X)$, 使 $A \prec \varphi \prec K$. 令

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) f(x), & x \in K; \\ 0, & x \in K^c, \end{cases}$$

则 $g \in C_0(X)$, $g \mid A = f$, g 即合于所求. □

应用上常见的 LCH 大多是第二可数空间,因此以下结果有广泛应用.

2.2.13 定理 设 X 是第二可数的 LCH,则 X 是正规空间,且存在覆盖 X 的紧集列 $\{K_n\}$, 使得 $K_n \subset\subset K_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbf{N}$). 如上的 $\{K_n\}$ 称为**紧集的穷竭序列**.

证 正规性直接由 2.1.11 得出. 结合 2.2.11 与 1.3.4,知 X 有由相对紧

集组成的可数拓扑基 $\{U_n\}$. 令 $K_1=\bar{U}_1$. 因 $K_1\subset\bigcup U_i$, 故有 $n_2>n_1=1$, 使得 $K_1\subset\bigcup_{i\leqslant n_2}U_i\triangleq V_2$. 令 $K_2=\bar{V}_2$, 则 K_2 是紧集且 $K_1\subset\subset K_2$. 如此继续,即可作出所需的 $\{K_n\}$. □

以下结果可与 2.2.3 相对照.

2.2.14 定理 (i) 设 X 是 LCH,则 X 的开与闭子空间是 LCH.

(ii) 设 $X_i(i\in I)$ 是一族 LCH, $X=\prod X_i$, 则 X 是 LCH $\Leftrightarrow$ 至多除有限个例外, X_i 是紧空间.

(iii) 设 X 是局部紧空间, $F\in C(X,Y)$ 是开满射,则 Y 是局部紧空间.

证 (i) 与(iii) 的证明是直接的.

(ii) 若 X 是 LCH,则必有某个紧集 K 内部非空.因而 K 包含一个形如§1.5(3)的基开集,这推出至多除去有限个例外有 $X_i=P_iK(P_i$ 是投影), 这样的 X_i 是紧空间.

由于可用 Tychonoff 定理(2.2.3(ii)),对于逆命题只需证:有限个 LCH 的积空间是 LCH,而这是显然的. □

2.2.14(ii)似乎暗含了这样的结论:无穷维 TVS 不能是局部紧的. 这一点将在 4.1.17 中予以证实. 因此,就 TVS 而言,仅有限维空间才是 LCH,这种空间的代表就是 $\mathbf{K}^n$ (参看 4.1.17).

经典分析中的一个熟知事实是:若将一个假想点 ∞ 附加到 $\mathbf{K}^n$, 则 $\mathbf{K}^n$ 中任何序列必有收敛子列,因而成为紧空间. 这一方法亦可应用于任何 LCH,得出所谓**一点紧化**,它是由 Alexandroff 引进的.

2.2.15 定理 设 (X,τ) 是一个非紧的 LCH. 取不在 X 中的元 ∞, 令 $\bar{X}=X\cup\{\infty\}$,

$$\bar{\tau}=\tau\cup\{\bar{X}\backslash K: K\subset X \text{ 为紧集}\}, \tag{3}$$

则 $(\bar{X},\bar{\tau})$ 是一个紧 T_2 空间, (X,τ) 是在 $\bar{X}$ 中稠密的开子空间.

如上的 $\bar{X}$ 在同胚的意义下是唯一的,称为 X 的一点紧化.

证 直接验知 $\bar{\tau}$ 是 $\bar{X}$ 上的一个拓扑. $\forall x\in X$, 取 x 在 X 中的相对紧邻域 V, 则 V 与 $\bar{X}\backslash\bar{V}$ 是 X 中分离点 x 与 ∞ 的开集. 由此知 $(\bar{X},\bar{\tau})$ 是 T_2 空间. 由(3)直接看出 (X,τ) 是 $(\bar{X},\bar{\tau})$ 的开子空间. 因任给紧集 $K\subset X$, $X\cap(\bar{X}\backslash K)=X\backslash K\neq\varnothing$, 故 ∞ 属于 X 在 $\bar{X}$ 中的闭包,因此 X 在 $\bar{X}$ 中稠密. 若 $\mathscr{A}\subset\bar{\tau}$ 覆盖 $\bar{X}$, 则必有 $A=\bar{X}\backslash K\in\mathscr{A}$, $K\subset X$ 是紧集. 取有限族 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 使 $K\subset\mathscr{B}^\sigma$, 则 $\mathscr{B}\cup\{A\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖. 因此 $\bar{X}$ 是紧空间. □

§2.3 连 通 性

连通性,乃是对"连成一片"这一直观概念的拓扑表述,它有强度略有差别

的两种形式:非隔断性与路连通性,两者都有其对应的局部化概念.

A. 连通与隔离

2.3.1 定义 设 (X,τ) 为拓扑空间. 若存在分解

$$X = A \cup B, \qquad \varnothing \neq A, \qquad B \in \tau, \qquad A \cap B = \varnothing, \tag{1}$$

则说 X 是**隔离的**,当 X 非隔离时称为**连通空间**. 若 $A \subset X$ 作为子空间是连通的,则称 A 为**连通集**.

已提到两集 $A,B \subset X$ 互相隔离 $\Leftrightarrow \bar{A} \cap B = \varnothing = A \cap B$(参看定理 2.1.13). 因此定义 2.3.1 可等价地表述为:不能表为互相隔离的两个非空集之并的空间称为连通空间.

$A \subset X$ 是连通集可直接描述为:不存在开集 U 与 V,使得

$$A \subset U \cup V, \qquad A \cap U \neq \varnothing \neq A \cap V, \qquad A \cap U \cap V = \varnothing. \tag{2}$$

连通性有多种形式的等价刻画,今将其主要者汇集如下.

2.3.2 定理 对于拓扑空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是连通的;

(ii) X 不能分解为两个非空闭集的不交并;

(iii) 除 $X,\varnothing$ 以外,X 没有既开又闭的子集;

(iv) 除 $X,\varnothing$ 以外,X 没有无边界点的子集;

(v) $\forall f \in C(X)$,$f(X)$ 是一个区间(可能退化为一点).

证 几乎可直接看出(i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv),只需证(i)⇔(v). 若 $f \in C(X)$,$f(X)$ 不是一个区间,则必有 $r \in \mathbf{R}$,使得 $r \,\overline{\in}\, f(X)$,而

$$(-\infty,r) \cap f(X) \neq \varnothing \neq (r,\infty) \cap f(X).$$

令 $A=\{f<r\}$,$B=\{f>r\}$,则(1)成立,因而 X 是不连通的. 反之,若 X 不连通,则它有一个如(1)的分解. 令 $f=\chi_A$,则用 1.3.16(v)易验知 $f \in C(X)$,而 $f(X)=\{0,1\}$,可见条件(v)不满足. □

在定理 2.3.2 中,条件(v)明显地占有特殊地位. 它是一个肯定陈述,而不像(i)~(iv)一样表为否定形式,因而运用时更为方便. $f(X)$ 是一个区间无非是说:若 $f(x)$ 取得值 α,β,则必取得介于 α 与 β 之间的任何值. 这就表明,连通空间正是对于其上的实连续函数成立介值定理的空间.

尽管像 TVS 这样的抽象空间总是连通空间,一般的拓扑空间成为连通空间的机会是很少的. 因此,讨论拓扑空间中的连通子集更有意义. 基本的问题是:连通集在什么样的运算或变换下仍为连通集? 以下定理汇集了主要的结果.

2.3.3 定理 (i) 设 $A_i \subset X(i \in I)$ 是一族连通集. 若存在连通集 $A \subset X$,使得 $A \cap A_i \neq \varnothing(\forall i \in I)$,则 $U = A \cup (\bigcup A_i)$ 是连通集. 特别,若 $\bigcap A_i \neq$

$\varnothing$，取 $x_0 \in \bigcap A_i$，令 $A = \{x_0\}$ 得出 $\bigcup A_i$ 是连通集.

(ii) 若 $A \subset X$ 是连通集，$A \subset B \subset \overline{A}$，则 B 是连通集.

(iii) 若 $A \subset X$ 是连通集，$F \in C(X,Y)$，则 FA 是连通集.

(iv) 若 $X_i (i \in I)$ 是一族连通空间,则 $X = \prod X_i$ 是连通的.

证　(i)～(iii)都可利用 2.3.2(v)来证明. 如对于(i),设 $f \in C(U)$，则 $J = f(A)$ 与 $J_i = f(A_i)(i \in I)$ 皆为区间,且 $J \cap J_i \neq \varnothing (\forall i \in I)$，由此推出

$$f(U) = J \cup \left(\bigcup_i J_i\right)$$

为区间是不成问题的,其细节不必赘述.

余下证(iv). 若 X,Y 是连通空间,取定 $x_0 \in X$，则利用

$$X \times Y = (\{x_0 \times Y\}) \cup \left(\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}\right)$$

与(i)推出 $X \times Y$ 连通,进而用归纳法推出有限个连通空间的积空间是连通的. 今设 X_i, X 依(iv). 若 X 非连通,则有 $f \in C(X)$，使 $f(X) = \{0,1\}$（参看 2.3.2 之证). 因 $f^{-1}(0)$ 与 $f^{-1}(1)$ 皆为开集,故有 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subset I$，非空开集 $U_k, V_k \subset X_{i_k} (1 \leqslant k \leqslant n)$，在集

$$U = \bigcap_k P_{i_k}^{-1} U_k \text{ 与 } V = \bigcap_k P_{i_k}^{-1} V_k$$

上 f 分别取值 0 与 1. 当 $i \overline{\in} \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 时固定 $x_i \in X_i$，则 f 看作 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) \in \prod_k X_{i_k}$ 的函数是连续的,而其值域为 $\{0,1\}$，这与 $\prod_k X_{i_k}$ 连通相矛盾. □

定理 2.3.3 表明,连通性是可乘的且在连续映射下保持. 显然,连通性远不是遗传的.

连通性概念有两类颇不相同的应用. 其一是证明连通空间中某个命题 P 成立，P 既可以是一条拓扑学命题,亦可能表面上与拓扑概念全然无关. 令 $A = \{x \in X : P \text{ 在 } x \text{ 成立}\}$. 欲证 P 在连通空间 X 上处处成立,只需验证:

(i) $A \neq \varnothing$，这通常是平凡的;

(ii) A 是开集,即 $x \in A$ 时有某个邻域 $V_x \subset A$;

(iii) A 是闭集,或等价地，A^c 是开集.

显然(i)～(iii) $\Rightarrow A = X$. 如上推理模式可看作是一种基于连通性的归纳法,它常用来证明某些唯一性结论. 一个简单例子是关于解析函数的唯一性定理:

2.3.4 定理　设 $f(z)$ 是区域(即连通开集) G 内的复解析函数，$Z = \{z : f(z) = 0\}$ 在 G 内有聚点,则 $f(z) \equiv 0$.

证　令 $A = Z' \cap G$. 由定理条件有 $A \neq \varnothing$. 若 $z \in A$，则利用 $f(\cdot)$ 在点 z 的幂级数展开式易推出在 z 邻近 $f = 0$，因而 A 是 G 的开子集. 其次 A 显然是 G 的闭子集. 于是由 G 连通得到 $A = G$，这推出 $f(z) \equiv 0$. □

连通性的另一类应用服务于拓扑学的目的：用于判定两个空间不同胚. 设 X,Y 是两个拓扑空间，若存在同胚 $F:X\to Y$，则 F 应将 X 的连通子集映为 Y 的连通子集. 如能指出 X 的某些连通子集不能映为连通集，则 X 与 Y 必不同胚. 以下是一个简单而又有意义的例子.

2.3.5 定理 设 $n>1$，则 $\mathbf{R}^n$ 不同胚于 $\mathbf{R}$ 的任何子集.

证 设 $F:\mathbf{R}^n\to X$ 是一个同胚，$X\subset\mathbf{R}$. 在 $\mathbf{R}^n$ 中任取不可数条互不相交的直线 $\{L_\alpha\}$，则 $J_\alpha=FL_\alpha$ 是 $\mathbf{R}$ 的连通子集，它必为区间且不会退化为一点. 于是 $\{J_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上不可数个互不相交的区间，这显然得出矛盾. □

B. 路连通性

2.3.6 定义 设 $J=[0,1]$. 若 $\varphi\in C(J,X)$，则称 φ 为 X 中以 $\varphi(0)$ 与 $\varphi(1)$ 为端点的**路径**. 若 X 中任一对点都是 X 中某条路径的端点，则称 X 为**路连通空间**. 若 $A\subset X$ 作为子空间是路连通的，则称 A 为**路连通集**.

设 X 路连通，$f\in C(X)$，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，$a,b\in X$. 取以 a,b 为端点的路径 φ，则 $f\circ\varphi\in C(J)$. 于是由介值定理推出 $f(x)$ 取到 α 与 β 之间的任何值，因此 $f(X)$ 必为区间. 这表明路连通 $\Rightarrow$ 连通，但其逆不真（参看例 2.3.8）.

若 X 是一个 TVS（参看 §1.4C），则 $\forall x,y\in X$，$\varphi(t)=(1-t)x+ty$ 显然是 X 中以 x,y 为端点的路径，因而 X 是路连通的. 实际上，X 中任何凸集都是路连通的，因而是连通的.

2.3.7 命题 路连通性是可乘的，且在连续映射下保持.

证 (i) 设 $X_i(i\in I)$ 是一族路连通空间，$X=\prod X_i$. 给定 $x,y\in X$，$\forall i\in I$，取 $\varphi_i\in C(J,X_i)$，使 $\varphi_i(0)=x_i$，$\varphi_i(1)=y_i$，则 $\varphi=(\varphi_i)\in C(J,X)$（用 1.5.6(iii)），$\varphi(0)=x$，$\varphi(1)=y$，这表明 X 是路连通的.

(ii) 设 X 是路连通的，$F\in C(X,Y)$ 为满射. 若 $a,b\in X$，φ 是 X 中以 a 与 b 为端点的路径，则 $F\circ\varphi$ 是 Y 中以 Fa 与 Fb 为端点的路径. 故 Y 是路连通的. □

2.3.8 例（拓扑正弦） 设

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:y=\sin(1/x),0<x\leqslant 1\}. \tag{3}$$

若令 $F(x)=(x,\sin(1/x))$，$\Delta=(0,1]$，则 $A=F(\Delta)$. 因 Δ 是路连通的，故 A 是路连通的，从而 $\overline{A}$ 是连通的（用 2.3.3(ii)）. 但 $\overline{A}$ 却不是路连通的. 否则，$\overline{A}$ 上存在以 $(0,0)$ 与 $(1,\sin 1)$ 为端点的路径 $\varphi(t)=(x(t),y(t))$. 设 $x(0)=y(0)=0$，当 $0<t\leqslant 1$ 时，$y(t)=\sin[1/x(t)]$. 但当 $x(t)\to 0$ 时 $y(t)\not\to 0$!

C. 局部连通性

2.3.9 定义 (i) 若 X 中每一点有一个由连通集(路连通集)组成的邻域基,则称 X 为**局部连通(局部路连通)**空间.

(ii) $\forall x \in X$, 以 P_x 记 X 中包含 x 的最大连通集,以 $\tilde{P}_x$ 记 X 中包含 x 的最大路连通集,二者分别称为 x 所属的**连通支**与**路连通支**.

取定 $x \in X$, 以 $\mathscr{A}$ 记 X 中含 x 的连通集之全体,则 $\{x\} \in \mathscr{A}$, 故 $x \in \bigcap \mathscr{A} \neq \varnothing$. 于是由 2.3.3(i)知 $\mathscr{A}^\sigma$ 是连通集,它显然就是含 x 的最大连通集,即 $\mathscr{A}^\sigma = P_x$. 若 $P_x \cap P_y \neq \varnothing$, 则 $P_x \cup P_y$ 是连通集,因而 $P_x = P_x \cup P_y = P_y$. 这表明两个连通支要么不相交,要么重合; X 必可分解为互不相交的连通支的并. 对路连通支亦可作类似说明. 因 $\bar{P}_x$ 必连通(依 2.3.3(ii)),故 $P_x = \bar{P}_x$, 因此连通支是闭集. 显然, X 是连通的(路连通的) $\Leftrightarrow X$ 仅含一个连通支(路连通支).

2.3.10 命题 对拓扑空间 X, 以下条件互相等价:

(i) X 是局部连通空间;

(ii) 若 $\varnothing \neq G \in \tau_X$, 则 G 的连通支皆为开集;

(iii) X 有一个由连通集组成的拓扑基.

对局部路连通性有类似的等价刻画.

证 只考虑局部连通的情况.

(i)$\Rightarrow$(ii). 设 X 是局部连通的, P_x 记 $x \in G$ 在 G 中的连通支,今证 P_x 为开集. $\forall y \in P_x$, 由 X 的局部连通性,必有 y 的连通邻域 V, 使 $V \subset G$. 于是 $y \in V \subset P_y = P_x$, 这表明 P_x 是开集.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 以 $\mathscr{B}$ 表 X 中非空开集的连通支之全体,则由条件(ii)推出 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基.

(iii)$\Rightarrow$(i)是平凡的. □

2.3.11 推论 (i) 若 X 是局部连通的,则 X 是其开的连通支的不交并.

(ii) 若 X 是局部路连通的, $G \subset X$ 为开集,则 G 为连通集 $\Leftrightarrow$ G 为路连通集.

前面已经指出,TVS 中的凸集是路连通的,因此 LCS(局部凸空间,参看 §1.4D)是局部路连通的. 于是由 2.3.11(ii)推出,对于 LCS 中的开集而言,连通性与路连通性并无区别. 在 Euclid 空间中,这是熟知的事实.

2.3.12 命题 (i) 若 X 是局部连通空间,则 X 的任何开子空间亦是局部连通的.

(ii) 若 X 是局部连通空间, $F: X \to Y$ 是一商映射,则 Y 亦是局部连通空间.

(iii) 设 $X=\prod_{i\in I}X_i$，则 X 是局部连通空间 $\Leftrightarrow X_i(i\in I)$ 皆为局部连通空间，且除至多有限个例外，X_i 是连通的.

综上，可以说局部连通性是开遗传与有限可乘的，且为商映射所保持.

对局部路连通性有同样结论.

证 (i)是平凡的.

(ii) 任给开集 $G\subset Y$，$y\in G$，只要证 y 在 G 中的连通支 P_y 是开集. 为此又只需证 $F^{-1}P_y$ 是开集. 任给 $x\in F^{-1}P_y$，则 x 在 $F^{-1}G$ 中的连通支 P_x 是开集，$Fx\in FP_x\subset G$，FP_x 连通(依 2.3.3(iii)). 故 $FP_x\subset P_y$，从而 $x\in P_x\subset F^{-1}P_y$. 故 $F^{-1}P_y$ 是开集，如所要证.

(iii)的证明类似于 2.2.14(ii)之证. □

值得注意的是，连通性并不蕴涵局部连通性. 可用拓扑正弦作为例子：在 2.3.8 中 $\overline{A}$ 是连通的，但点(0,0)在 $\overline{A}$ 中并无由连通集组成的邻域基！局部连通空间在连续映射下的象也不必是局部连通的，以下就是一个简单的反例：设

$$f(n)=\begin{cases}1/n, & n\in\mathbf{N},\\ 0, & n=0,\end{cases}$$

$\mathbf{Z}_+$ 是局部连通的，而 $f(\mathbf{Z}_+)$ 则不是.

§2.4 局部有限覆盖

我们已用开覆盖来刻画紧性. 覆盖概念对于拓扑空间的重要性在于：如果集族 $\mathscr{U}$ 覆盖空间 X，则 X 的局部性质可能与 $\mathscr{U}$ 中的集有联系，而 $\mathscr{U}$ 的一定特征则可能反映了空间 X 的局部性质与整体性质的某种联系. 要使 $\mathscr{U}$ 能起这种作用，$\mathscr{U}$ 中的集不宜太多，即 $\mathscr{U}$ 不应过分重迭，这就要求 $\mathscr{U}$ 是"局部有限"的(见下面的定义 2.4.1). 本节利用局部有限覆盖概念，对一些已知的拓扑性质(如正规性)给出新的刻画，同时描述某些新的拓扑性质.

A. 局部有限族

首先提出关于集族的一些概念与术语.

2.4.1 定义 设 (X,τ) 是拓扑空间，$\mathscr{A},\mathscr{B}\subset 2^X$.

(i) 若 $\forall x\in X$，$\exists V\in\mathscr{N}_x$，使 V 至多与 $\mathscr{A}$ 中有限多个(或一个)集相交，则称 $\mathscr{A}$ 为**局部有限族**(或**离散族**)；若每个 $x\in X$ 至多属于 $\mathscr{A}$ 中有限多个集，则称 $\mathscr{A}$ 为**点有限族**. 可数多个局部有限(或离散)族的并称为 **σ-局部有限**(或 **σ-离散**)族.

(ii) 设 $\mathscr{A}$ 覆盖 X. 若 $\mathscr{A}<\mathscr{B}$(记号依 § 1.1(5)),则称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的一个**加细**;当 $\mathscr{A}\subset\tau$ 时称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的一个**开加细**."闭加细"、"局部有限加细"等术语的意义自明.若 $\mathscr{A}=\{A_i:i\in I\}$,$\mathscr{B}=\{B_i:i\in I\}$,$A_i\subset B_i(\forall i\in I)$,则称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的 **1-1 加细**.

以下命题汇集了局部有限族的一些简单性质,在下面的讨论中它们将被反复运用.

2.4.2 命题 (i) 若 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是局部有限族,则

$$\overline{\mathscr{A}^\sigma}=\bigcup\{\bar{A}:A\in\mathscr{A}\}. \tag{1}$$

(ii) 若 $\mathscr{A}$ 是局部有限的闭集族,则 $\mathscr{A}^\sigma$ 是闭集.

(iii) 若 $\mathscr{A}$ 是 X 的局部有限闭覆盖,$F:X\to Y$,对任给 $A\in\mathscr{A}$,有 $F|A\in C(A,Y)$,则 F 连续(参照 1.3.16(iv)).

(iv) 设 $\{f_i:i\in I\}\subset C(X)$,$\{\operatorname{supp} f_i\}$ 是局部有限族,则

$$f\triangleq\sum f_i\in C(X).$$

综合如上结论可以说,局部有限族可如同有限族一样使用.这正是局部有限族的优势之所在.

证 (i) 显然 $\overline{\mathscr{A}^\sigma}\supset\bigcup\{\bar{A}:A\in\mathscr{A}\}$. 任给 $x\in\overline{\mathscr{A}^\sigma}$,取 $V\in\mathscr{N}_x$,使 V 仅与有限多个 $A_i\in\mathscr{A}(1\leqslant i\leqslant n)$ 相交,则必 $x\in\bigcup\bar{A}_i$. 因此等式(1)成立.

(ii)是(i)的直接推论.

(iii) 任给闭集 $B\subset Y$,今证 $F^{-1}B$ 为闭集(参考 1.3.13(iv)). 令 $F_A=F|A$,则

$$F^{-1}B=\bigcup\{F_A^{-1}B:A\in\mathscr{A}\},$$

其中每个 $F_A^{-1}B$ 是闭集,因而只要说明 $\{F_A^{-1}B:A\in\mathscr{A}\}$ 是局部有限族(然后用(ii)),而这由 $\mathscr{A}$ 的局部有限性推出.

(iv) 显然只要说明,函数 f 在每点 x 的某个开邻域内有定义且连续(参考 1.3.16(iv)). $\forall x\in X$,取 x 的开邻域 V,使 V 至多与有限多个 $\operatorname{supp} f_i$ 相交,则 $\sum f_i|V$ 实际上是有限多个连续函数的和,因而是连续的. □

B. 再论正规性

在定理 2.1.10 的基础上,对正规空间可给出进一步的如下刻画.

2.4.3 定理 对于 T_2 空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是正规的;

(ii) 对 X 的任何点有限开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$,存在 $\mathscr{U}$ 的开加细 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}$,使得 $\bar{V}_\alpha\subset U_\alpha$;

(iii) 对 X 的任何局部有限开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$,存在 $\{f_\alpha\}\subset C(X,J)$,$J=$

$[0,1]$，使得 $\sum f_\alpha = 1$，$\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$. 这样的 $\{f_\alpha\}$ 称为从属于覆盖 $\mathscr{U}$ 的一个**单位分解**.

证 (i)⇒(ii). 不妨设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\mu}$，$\alpha$ 是序数. 令 $F_0 = \bigcap_{\alpha>0} U_\alpha^c$，则 F_0 是闭集，$F_0 \subset U_0$. 由正规性并用 2.1.10(ii)，有开集 $V_0 \subset X$，使 $F_0 \subset V_0 \subset\subset U_0$. 假定对某个 $\alpha < \mu$，$\forall \beta < \alpha$，已求得开集 V_β，使得

$$\Big(\bigcap_{\gamma<\beta} V_\gamma^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{\gamma>\beta} U_\gamma^c\Big) \triangleq F_\beta \subset V_\beta \subset\subset U_\beta \qquad (\beta < \alpha). \tag{2}$$

今证可将(2)过渡到以 α 代 β 的情况，为此，只要证

$$\Big(\bigcap_{\gamma<\alpha} V_\gamma^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{\gamma>\alpha} U_\gamma^c\Big) \triangleq F_\alpha \subset U_\alpha. \tag{3}$$

任取 $x \in U_\alpha^c$，今证 $x \overline{\in} F_\alpha$. 取最大的 $\beta < \mu$，使 $x \in U_\beta$（$\mathscr{U}$ 点有限用于此！），可设 $\beta < \alpha$. 若 $x \in F_\alpha$，则由(3)知 $x \in V_\beta^c \subset F_\beta^c$. 因 $\forall \gamma > \beta$ 有 $x \in U_\gamma^c$，故由(2)必有 $\gamma < \beta$，使 $x \in V_\gamma$，这与 $x \in F_\alpha$ 矛盾. 故 $x \overline{\in} F_\alpha$. 这就归纳地作出闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ 与开集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha<\mu}$，使得 $F_\alpha \subset V_\alpha \subset\subset U_\alpha (\alpha < \mu)$. $\forall x \in X$，取最大的 $\alpha < \mu$，使 $x \in U_\alpha$. 若 $x \overline{\in} F_\alpha$，则必有 $\beta < \alpha$ 使 $x \in V_\beta$. 而 $x \in F_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha$. 因此 $\{V_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ 覆盖 X，故 $\{V_\alpha\}$ 是条件(ii)所要求的开加细.

(ii)⇒(iii). $\mathscr{U}$ 显然是点有限的. 于是两次应用条件(ii)可得 X 的开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 与 $\{W_\alpha\}$，使得 $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha \subset\subset U_\alpha$. 不难看出条件(ii)蕴涵 2.1.10 中条件(ii)，因此由 2.1.10 有 $g_\alpha \in C(X)$，使得 $W_\alpha \prec g_\alpha \prec V_\alpha$. 由 $\mathscr{U}$ 局部有限推出 $\{\operatorname{supp} g_\alpha\}$ 局部有限，因此 $g \triangleq \sum g_\alpha \in C(X)$（用命题 2.4.2(iv)）. 由 $\{W_\alpha\}$ 覆盖 X 与 $g_\alpha \mid W_\alpha = 1$ 得 $g > 0$，于是 $f_\alpha \triangleq g_\alpha / g \in C(X,J)$，$\{f_\alpha\}$ 显然是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.

(iii)⇒(i). 设 A,B 是 X 中互不相交的闭集，则 $\{A^c, B^c\}$ 是 X 的开覆盖. 于是由条件(iii)有从属于 $\{A^c, B^c\}$ 的单位分解 $\{f,g\}$，直接看出 $f(A) = 0$，$f(B) = 1$，故 X 是正规空间. □

从属于 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 的单位分解存在，是一个极有价值的结论，在许多领域有其应用. 一个简单的事实是，若 $\{f_\alpha\}$ 是 X 上从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解，$F \in C(X,Y)$，Y 是某个 TVS，令 $F_\alpha = f_\alpha F$，则得到分解 $F = \sum F_\alpha$. 因 $\operatorname{supp} F_\alpha \subset \operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$，故 F_α 可当作从 U_α 到 Y 的连续映射处理. 这样，通过单位分解 $\{f_\alpha\}$，就将对映射 F 的讨论**局部化**了.

应用 2.4.3(iii)时，$\mathscr{U}$ 的局部有限条件可能成为障碍. 在特殊情况下，可去掉这一限制.

2.4.4 定理 设 X 是第二可数的 LCH，$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 X 中一族开集，它覆盖闭集 $A \subset X$，则存在 $\{f_\alpha\} \subset C(X)$，使得 $f_\alpha \prec U_\alpha$，$\{\operatorname{supp} f_\alpha\}$ 局部有限，$\sum f_\alpha \leqslant 1$，$\sum f_\alpha \mid A = 1$. 这样的 $\{f_\alpha\}$ 称为 A 上从属于 $\mathscr{U}$ 的一个单位分解.

证 可设 $A = X$(一般情况由以 $\mathscr{U} \cup \{A^c\}$ 代替 $\mathscr{U}$ 得出). 取紧集的穷竭序列 $\{K_n\}$ (依 2.2.13), 令 $K_0 = \varnothing, A_{n\alpha} = U_\alpha \cap (K^\circ_{n+2} \backslash K_{n-1})(n \geqslant 1)$. 任给 $n \in \mathbf{N}$, 取 $\mathscr{A}_n \triangleq \{A_{n\alpha}\}$ 的有限子族 $\mathscr{B}_n$, 使之覆盖紧集 $K_{n+1} \backslash K^\circ_n$. 于是 $\mathscr{B} = \bigcup \mathscr{B}_n$ 是 X 的一个可数开覆盖, 由其构成知它是局部有限的, 且 $\mathscr{B} < \mathscr{U}$. 设 $\mathscr{B} = \{B_i : i \in \mathbf{N}\}$. 因为 X 是正规空间(依定理 2.2.13), 由定理 2.4.3 有从属于 $\mathscr{B}$ 的单位分解 $\{g_i\}$. $\forall i \in \mathbf{N}$, 选取 $U_{\alpha_i} \supset B_i$. 定义

$$f_\alpha = \sum_{\alpha_i = \alpha} g_i; \text{当}\{i : \alpha_i = \alpha\} = \varnothing \text{ 时令 } f_\alpha = 0,$$

则 $f_\alpha \in C(X, J)$,

$$\operatorname{supp} f_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha_i = \alpha} \{g_i \neq 0\}} = \bigcup_{\alpha_i = \alpha} \operatorname{supp} g_i \subset U_\alpha \quad (\text{用 } 2.4.2(\mathrm{i}));$$

$$\sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha \sum_{\alpha_i = \alpha} g_i = \sum_i g_i = 1.$$

从 $\{\operatorname{supp} g_i\}$ 局部有限直接推出 $\{\operatorname{supp} f_\alpha\}$ 局部有限, 故 $\{f_\alpha\}$ 是从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解. □

C. 仿紧性

2.4.5 定义(Dieudonné 1944) 若拓扑空间 X 的每个开覆盖有一个局部有限的开加细, 则称 X 为**仿紧空间**.

紧空间平凡地是仿紧空间. 后面将证明: 度量空间总是仿紧的(参看 3.3.9), 可见仿紧空间比紧空间要广泛得多. 另一方面, 仿紧空间多少有点类似于紧空间. 例如, 以下结果可看作 2.2.6 的某种推广.

2.4.6 定理 T_2 仿紧空间是正规空间.

证 设 X 是 T_2 仿紧空间, 证明分两步到位.

(i) 证 X 是正则的. 设 $x \in V \in \tau_X$. $\forall y \in V^c$, 取 y 的开邻域 U_y, 使 $x \notin \overline{U}_y$, 则 $\{U_y : y \in V^c\} \cup \{V\}$ 覆盖 X, 取其局部有限开加细 $\mathscr{W}$. 令 $\mathscr{W}_1 = \{W \in \mathscr{W} : W \not\subset V\}, W_1 = \mathscr{W}_1^\#$, 则

$$\begin{aligned} x &\in \bigcap \{(\overline{U}_y)^c : y \in V^c\} \\ &\subset (\bigcup \{\overline{W} : W \in \mathscr{W}_1\})^c \\ &= (\overline{W}_1)^c \subset W_1^c \subset V \quad (\text{用 } 2.4.2(\mathrm{i})), \end{aligned}$$

可见 W_1^c 是 x 的含于 V 内的闭邻域. 故 X 是正则的.

(ii) 证 X 是正规的. 设 $A \subset\subset B \subset X$. $\forall x \in \overline{A}$, 取 x 的开邻域 A_x, 使 $\overline{A}_x \subset B^\circ$, 则 $\{A_x : x \in \overline{A}\} \cup \{X \backslash \overline{A}\}$ 是 X 的开覆盖, 取其局部有限开加细 $\mathscr{U}$. 令 $\mathscr{U}_1 = \{U \in \mathscr{U} : U \cap \overline{A} \neq \varnothing\}, U_1 = \mathscr{U}_1^\#$, 则

$$\begin{aligned} \overline{A} &\subset U_1 \subset \overline{U}_1 = \bigcup \{\overline{U} : U \in \mathscr{U}_1\} \quad (\text{用 } 2.4.2(\mathrm{i})) \\ &\subset \bigcup \{\overline{A}_x : x \in \overline{A}\} \subset B^\circ, \end{aligned}$$

即 $A \subset\subset U_1 \subset\subset B$. 故 X 是正规的. □

以上证明的主要技巧,就是应用由 2.4.2(i)所描述的局部有限族的性质. 以下是本节的主要结果.

2.4.7 定理 对于正则空间 X, 以下条件互相等价:

(i) X 是仿紧的;

(ii) X 的每个开覆盖有局部有限加细;

(iii) X 的每个开覆盖有局部有限闭加细;

(iv) X 的每个开覆盖有 σ - 局部有限开加细;

(v) X 的每个开覆盖有从属于它的单位分解.

证 证明的路线是(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i)⇒(iv)⇒(ii),(i)⇒(v)⇒(iii),其中(i)⇒(ii),(i)⇒(iv)与(v)⇒(iii)是平凡的.

(ii)⇒(iii). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 由正则性,存在 X 的开覆盖 $\mathscr{V}$,使得 $\{\bar{V}: V \in \mathscr{V}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细. 设 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{V}$ 的局部有限加细,则 $\{\bar{W}: W \in \mathscr{W}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限闭加细.

(iii)⇒(i). 设条件(iii)满足,$\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 首先取 $\mathscr{U}$ 的一个局部有限闭加细 $\mathscr{B}$. $\forall x \in X$, 取 x 的开邻域 V_x, 使 V_x 至多交于 $\mathscr{B}$ 中有限多个集,进而取 $\mathscr{V} \triangleq \{V_x : x \in X\}$ 的局部有限闭加细 $\mathscr{A}$. $\forall B \in \mathscr{B}$, 令

$$W_B = (\bigcup \{A \in \mathscr{A}: A \cap B = \varnothing\})^c, \tag{4}$$

则 $B \subset W_B$ 且 W_B 是开集(用 2.4.2(ii)),因而 $\mathscr{W} \triangleq \{W_B : B \in \mathscr{B}\}$ 是 X 的开覆盖. $\forall x \in X$, 取 x 的邻域 N_x, 使 N_x 仅与有限多个 $A \in \mathscr{A}$ 相交. 若 $B \in \mathscr{B}$, $W_B \cap N_x \neq \varnothing$, 则 $N_x \not\subset W_B^c$, 因而有 $A \in \mathscr{A}$, 使得(用(4))

$$N_x \cap A \neq \varnothing \neq A \cap B. \tag{5}$$

由 N_x 的取法知满足(5)的 A 仅有有限多个,由 $\mathscr{A} < \mathscr{V}$ 及 V_x 的取法知满足(5)的 B 也只有有限多个. 因此 $\mathscr{W}$ 局部有限. $\forall B \in \mathscr{B}$, 取 $U_B \in \mathscr{U}$, 使 $B \subset U_B$, 则 $\{U_B \cap W_B : B \in \mathscr{B}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细,因此 X 是仿紧的.

(iv)⇒(ii). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,$\mathscr{U}$ 有开加细 $\mathscr{V} = \bigcup \mathscr{V}_n$, $\mathscr{V}_n (n \in \mathbf{N})$ 为局部有限族. $\forall V \in \mathscr{V}_n$, 令

$$W_V = V \setminus \bigcup_{k<n} \mathscr{V}_k^{\#},$$

今证 $\mathscr{W} \triangleq \{W_V : V \in \mathscr{V}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个局部有限加细. $\forall x \in X$, 取最小的 n, 使 $x \in \mathscr{V}_n^{\#}$; 取 $V \in \mathscr{V}_n$, 使 $x \in V$, 则 $x \in W_V$. 因此 $\mathscr{W}$ 覆盖 X. 显然 $\mathscr{W} < \mathscr{V} < \mathscr{U}$. 余下证 $\mathscr{W}$ 局部有限. $\forall x \in X$, 设 $x \in V \in \mathscr{V}_n$, 取 $N \in \mathscr{N}_x$, 使 $N \subset V$ 且 N 仅与 $\bigcup\limits_{k \leqslant n} \mathscr{V}_k$ 中有限多个集相交. 若 $N \cap W_U \neq \varnothing$, $U \in \mathscr{V}_k$, 则必 $V \cap W_U \neq \varnothing \neq N \cap U$, 从而 $k \leqslant n$, 故 N 仅与有限多个这样的 W_U 相交. 这表明 $\mathscr{W}$ 是局部有限族.

(i)⇒(v). 任给 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$,由仿紧性有 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{V}$,不妨设 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 1-1 加细. 结合 2.4.6 与 2.4.3(iii),知 X 上有从属于 $\mathscr{V}$(从而亦从属于 $\mathscr{U}$)的单位分解. □

结合 2.4.4 与 2.4.7 得出:第二可数的 LCH 是仿紧空间.

下面的表给出部分空间类在运算与映射下的不变性,其中 C_{I} 与 C_{II} 分别表示第一可数空间与第二可数空间类,"连续"表示在连续映射下保持,"开连续"等仿此,+表示肯定,−表示否定.

空间类	遗传	开遗传	闭遗传	可乘	可数可乘	有限可乘	连续	开连续	闭连续
C_{I}	+	+	+	−	+	+	−	+	−
C_{II}	+	+	+	−	+	+	−	+	−
可分	−	+	−	−	+	+	+	+	+
T_2	+	+	+	+	+	+	−	−	−
T_3	+	+	+	+	+	+	−	−	−
全正则	+	+	+	+	+	+	−	−	−
正规	−	−	+	−	−	−	−	−	+
全正规	+	+	+	−	−	−	−	−	+
紧	−	−	+	+	+	+	+	+	+
序列紧	−	−	+		+	+	+	+	+
可数紧	−	−	+	−	−	−	+	+	+
局部紧	−	−	+	−	−	+	−	+	−
仿紧	−	−	+	−	−	−	−	+	−
连通	−	−	−	+	+	+	+	+	+
路连通	−	−	−	+	+	+	+	+	+
局部连通	−	+	−	−	−	+	−	+	+
可度量化	+	+	+	−	+	+	−	−	−

§2.5　拓扑空间的例子

在本书中,拓扑空间是最一般的抽象空间,今后考虑的所有其他抽象空间,都可看作拓扑空间的特殊例子. 不过,本节并不涉及这些将在后面系统考察的空间,而是考虑一些相对来说较为零散的例子,它们或者适于用来阐明某些拓扑性质之间的关系,或者因其构造特点而特别具有启发性. 限于篇幅,我们只选择若干较简单的例子,且对于某些结论省略了繁冗的论证.

A. 任意集上的拓扑

任给非空集 X，在其中可定义多种有意义的拓扑. 最简单的是平凡拓扑与离散拓扑，它们已被多次提到，不再在讨论之列.

2.5.1 例（有限补拓扑）　设 X 是任一无限集. 令

$$\tau = \{A \subset X: A^c \text{ 是有限集或 } A = \varnothing\}, \tag{1}$$

则易直接验知 τ 为 X 上的拓扑，称为**有限补拓扑**. 这个拓扑有一些有趣的特殊性质. 以下设 X 中采用有限补拓扑 τ.

(i) 任给无限集 $A \subset X$，有 $\bar{A} = X$，因而 X 总是可分空间（可分性的准确定义见 3.3.3）.

证　任给有限集 $B \subset X$，有 $A \cap B^c \neq \varnothing$，由此推出所要结论.

(ii) X 是第二可数空间 $\Leftrightarrow X$ 是可数集. 因此，当 X 不可数时，它是非第二可数的可分空间.

证　当 X 是可数集时，τ 是可数族，因而 X 是第二可数的. 反之，若 $\mathscr{B} = \{A_n^c\}$ 是 X 的可数拓扑基，$A_n \subset X$ 是有限集，则必 $X = \bigcup A_n$. 否则存在 $x \in \bigcap A_n^c$，而 $X \backslash \{x\}$ 是开集，故有某个 $A_n^c \subset X \backslash \{x\}$，但这推出 $x \in A_n \cap A_n^c = \varnothing$!

(iii) X 是 T_1 空间而非 T_2 空间.

证　显然 $\{x\}(x \in X)$ 恒为闭集，故 X 是 T_1 空间（依 2.1.2(ii)）. 因 X 中不存在互不相交的非空开集，故 X 不是 T_2 空间.

2.5.2 例（可数补拓扑）　设 X 是任一不可数集，令

$$\tau = \{A \subset X: A^c \text{ 是可数集或 } A = \varnothing\}, \tag{2}$$

则 τ 是 X 上的拓扑，称为**可数补拓扑**. 以下设 X 中使用可数补拓扑.

(i) X 不是第一可数空间.

证　任给 $x \in X$ 的一列开邻域 $\{V_n\}$，令 $V = \bigcap V_n$，则 V 仍为 x 的开邻域且是不可数集. 任取 $y \in V \backslash \{x\}$，令 $U = V \backslash \{y\}$，则 U 是 x 的开邻域，$V_n \not\subset U(\forall n \in \mathbf{N})$，可见 $\{V_n\}$ 不是 x 的邻域基.

(ii) 任给不可数集 $A \subset X$，有 $\bar{A} = X$. 当 $x \in \bar{A}$ 时不必有序列 $\{x_n\} \subset A$，使得 $x_n \to x$.

证　任给可数集 $B \subset X$，有 $A \cap B^c \neq \varnothing$，这推出 $\bar{A} = X$. 若 $A \neq X$，取 $x \in A^c$，则 $x \in \bar{A}$，但对任何序列 $\{x_n\} \subset A$，$V \triangleq X \backslash \{x_n\}$ 是 x 的开邻域，而 $x_n \,\bar{\in}\, V(\forall n \in \mathbf{N})$，可见 $x_n \not\to x$.

以上例子表明，在非第一可数空间中，序列极限不足以用来描述闭包.

B. R 上的非通常拓扑

R 上可定义多种非通常拓扑，其中有些有自然的直观意义. 下面介绍的几

种就属此类.

2.5.3 例(上拓扑)　直接看出,

$$\tau_u \triangleq \{(-\infty, a): -\infty \leqslant a \leqslant \infty\} \tag{3}$$

是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑,称为**上拓扑**. 下面以 $\mathbf{R}_u$ 记拓扑空间 $(\mathbf{R}, \tau_u)$, $\mathbf{R}_u$ 有如下性质:

(i) $\mathbf{R}_u$ 是第二可数空间. 实际上, $\{(-\infty, r): r \in \mathbf{Q}\}$ 就构成一个可数拓扑基.

(ii) 在 $\mathbf{R}_u$ 中 $x_n \to x$ 意味着

$$\overline{\lim_n} x_n \leqslant x.$$

任给拓扑空间 Ω, 一函数 $f: \Omega \to \mathbf{R}_u$ 连续意味着

$$\overline{\lim_{s \to t}} f(s) \leqslant f(t) \qquad (\forall t \in \Omega),$$

这就是通常所说的**上半连续**.

(iii) $\mathbf{R}_u$ 是 T_0 而非 T_1 空间

证　任给 $a, b \in \mathbf{R}$, 设 $a < b$, 则 $(-\infty, b)$ 是 a 在 $\mathbf{R}_u$ 中的开邻域而 $b \notin (-\infty, b)$. 故 $\mathbf{R}_u$ 是 T_0 空间. 另一方面, $\forall x \in \mathbf{R}$, 在 $\mathbf{R}_u$ 中有 $\overline{\{x\}} = [x, \infty)$, 故 $\{x\}$ 不是闭集,因而 $\mathbf{R}_u$ 不是 T_1 空间.

类似地,在 $\mathbf{R}$ 上可定义**下拓扑**并得出类似的性质.

2.5.4 例(上极限拓扑)　在 $\mathbf{R}$ 上以

$$\mathscr{B} = \{[a, b): -\infty < a < b < \infty\}$$

为基生成一个拓扑 τ_r, 称为**上极限拓扑**或右半开区间拓扑. 下面以 $\mathbf{R}_r$ 记空间 $(\mathbf{R}, \tau_r)$, 它也称为 **Sorgenfrey 直线**(1947), $\mathbf{R}_r$ 因其引人注意的性质而成为著名的拓扑学例子.

(i) $\mathbf{R}_r$ 是第一可数而非第二可数的.

证　任给 $x \in \mathbf{R}_r$, $\{[x, x + 1/n)\}$ 是 x 的一个邻域基. 另一方面,任给序列 $\{a_n, b_n\} \subset \mathbf{R}$, $a_n < b_n$, 只要 $x \notin \{a_n\}$, 就不可能有 $[x, \infty) = \bigcup [a_n, b_n)$. 这表明 $\mathbf{R}_r$ 不是第二可数的.

(ii) 在 $\mathbf{R}_r$ 中 $x_n \to x$ 意味着 $x_n \to x^+$. 任给拓扑空间 Ω 与映射 $f: \mathbf{R}_r \to \Omega$, f 在 $x \in \mathbf{R}_r$ 连续意味着

$$\lim_{x_n \to x^+} f(x_n) = f(x),$$

即 f 在 x 右连续.

(iii) $\mathbf{R}_r$ 是全正规空间,但 $\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_r$ 不是正规的. 事实上,令 $A = \{(x, -x): x$ 是有理数$\}$, $B = \{(x, -x): x$ 是无理数$\}$, 则 A, B 是 $\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_r$ 中互不相交的闭集,它们不能用开集分离(参考[11, p. 49]).

(iv) 每个 $[a, b)$ $(a < b)$ 是 $\mathbf{R}_r$ 中的闭集:

$$[a,b) = \mathbf{R}\backslash((-\infty,a) \cup [b,\infty)).$$

因此，$\mathbf{R}_r$ 是不连通的.

类似地，在 $\mathbf{R}$ 上可定义**下极限拓扑**并得出类似性质.

2.5.5 例（非正则直线）　以 τ 记 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑，令

$$Z = \{1/n : n \in \mathbf{N}\},$$

$$\tau_0 = \{G\backslash A : G \in \tau, A \subset Z\}. \tag{4}$$

以 $\mathbf{R}_0$ 记 $(\mathbf{R},\tau_0)$，则 $\mathbf{R}_0$ 是 T_2 空间而非正则空间.

证　直接验证 τ_0 是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑. 因 $\tau \subset \tau_0$，故 $\mathbf{R}_0$ 必定是 T_2 空间. 因 $\mathbf{R}\backslash Z$ 是 $\mathbf{R}_0$ 中的开集，故 Z 是 $\mathbf{R}_0$ 中的闭集. 今指明 0 与 Z 在 $\mathbf{R}_0$ 中不能被开集分离（因而 $\mathbf{R}_0$ 不是正则的）. 设 U 与 V 是 $\mathbf{R}_0$ 中分离 0 与 Z 的开集，则必 $U = G\backslash A, G, V \in \tau, A \subset Z$. 由 $U \cap V = \varnothing$ 推出 $G \cap V = \varnothing$，于是有 $\delta > 0$，使 $(-\delta,\delta) \cap V = \varnothing$. 但这推出 $(-\delta,\delta) \cap Z = \varnothing$，得出矛盾.　□

C. 序拓扑

设 $(X,\leqslant)$ 是一全序集（参看 1.1.4）. 附加两个不在 X 中的元 $\pm\infty$，并约定 $-\infty < x < \infty (\forall x \in X)$. $\forall a,b \in X \cup \{\pm\infty\}$，以 (a,b) 记序区间 $\{x \in X : a < x < b\}$. 以

$$\mathscr{B} = \{(a,b) : -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty\}$$

为基在 X 中生成一拓扑 τ，称为**序拓扑**或**区间拓扑**. 显然，$\mathbf{R}$ 上的通常拓扑就是一种序拓扑，这一特殊情况启示出某些一般结论.

2.5.6 命题　对于序拓扑空间 (X,τ) 以下结论成立：

(i) $\{(-\infty,a),(a,\infty) : a \in X\}$ 是一拓扑子基，若 X 中无最大最小元，则 $\{(a,b) : a,b \in X\}$ 是一拓扑基.

(ii) 序区间 $[a,b]（a,b \in X, a \leqslant b）$ 是闭集.

(iii) 设 $A \subset X, b \in X$，则 $b = \sup A \Leftrightarrow A \leqslant b$ 且 $b \in \bar{A}$.

(iv) 若 $A \subset X$ 是序稠密的，即 $\forall a,b \in X, a < b \Rightarrow \exists r \in A$，使 $a < r < b$，则 $\bar{A} = X$.

(v) X 是正则空间.

(vi) X 是连通的 $\Leftrightarrow$ X 满足如下 Dedekind 分割公理：若 $X = A \cup B, A, B \neq \varnothing, A < B$，则 A 有最大元或 B 有最小元但二者不同时存在.

(vii) X 是紧的 $\Leftrightarrow$ 任给非空子集 $A \subset X$，$\sup A$ 与 $\inf A$ 皆存在.

证　结论(i)～(v)的证明是平凡的. (vi)，(vii)的证明稍需技巧，下面以证(vii)为例. 若 $A \subset X$，$\sup A$ 不存在，则

$$\mathscr{U} = \{(-\infty,a) : a \in A\} \cup \{(b,\infty) : A < b \in X\}$$

是 X 的开覆盖，它显然不存在有限子覆盖. 反之，设 X 的任何非空子集存在上

下确界，$\mathscr{U}$是 X 的一个开覆盖. X 必有最小元 m 与最大元 M. 令

$$S=\{x\in X:[m,x]\text{ 可被 }\mathscr{U}\text{ 中有限个集覆盖}\},$$

则 $m\in S\neq\varnothing$. 令 $b=\sup S$, 则存在 $U\in\mathscr{U}$ 使 $b\in U$. 从而 $U\subset S$. 这推出 $b=M$, 因而 X 是紧的. □

带有序拓扑的序数区间常用作阐明某些拓扑概念的例子. 下面给出一些标准的结果. 以下提及的序数区间上都使用序拓扑. 回忆 ω 与 ω_1 分别记最小无限序数与最小不可数序数.

2.5.7 命题　(i) 任给序数 α, $[0,\alpha]$ 是紧空间.

(ii) $[0,\omega_1)$ 是正规的, 但不是完正规的.

(iii) $[0,\omega_1)$ 上的连续实函数皆有界.

(iv) $[0,\omega_1)$ 是可数紧、序列紧而非紧的空间.

(v) $[0,\omega_1]\times[0,\omega]$ 是正规而非全正规空间,

$$[0,\omega_1]\times[0,\omega]\backslash\{(\omega_1,\omega)\}$$

是全正则而非正规空间.

证　只证(i)(iv)(v), (ii)(iii)之证参看[11, p. 36]. 设 $\mathscr{U}$ 是覆盖 $[0,\alpha]$ 的一族开区间. 取 $U_1\in\mathscr{U}$, 使 $\alpha\in U_1$; 取 $U_2\in\mathscr{U}$, 使 U_2 含 U_1 的左端点, ……. 若如此得出无限多个 $\alpha_n\geqslant 0$, 则 $\{\alpha_n\}$ 无最小元, 得出矛盾. 因此对某个 n 有 $\alpha_n<0$, 因而 $[0,\alpha]\subset\bigcup_1^n U_i$, $[0,\alpha]$ 是紧的.

(iv) 由 2.5.6(vii), $[0,\omega_1)$ 不是紧的. 其次, 设 $\mathscr{U}\triangleq\{(a_n,b_n)\}$ 是 $[0,\omega_1)$ 的可数开覆盖, 必有某个 $b_n\geqslant\omega_1$, 否则将有 $\sup\limits_n b_n<\omega_1$, 与 $\mathscr{U}$ 覆盖 $[0,\omega_1)$ 相矛盾. 不妨设 $a_1<b_1=\omega_1$, 由 $\mathscr{U}$ 覆盖紧集 $[0,a_1]$ 推出有有限子族 $\mathscr{U}_1$ 覆盖 $[0,a_1]$, 于是 $\mathscr{U}_1\cup\{(a_1,b_1)\}$ 覆盖 $[0,\omega_1)$. 这证得 $[0,\omega_1)$ 可数紧. 显然 $[0,\omega_1)$ 是第一可数的, 因而也是序列紧的(参考 2.2.9).

(v) $[0,\omega_1]\times[0,\omega]$ 作为紧 T_2 空间必为正规空间(用(i)与命题 2.2.6). 今证其子空间

$$X\triangleq[0,\omega_1)\times[0,\omega]\backslash\{(\omega_1,\omega)\}$$

不是正规的. $A=\{\omega_1\}\times[0,\omega)$ 与 $B=[0,\omega_1)\times\{\omega\}$ 显然是 X 中互不相交的闭集. 设 $A\subset U$, U 是 X 的开子集. $\forall i<\omega$, 取最小序数 α_i, 使 $\alpha_i<\beta\leqslant\omega_1\Rightarrow(\beta,i)\in U$. 因 $\sup\alpha_i<\omega_1$, 故有序数 β, 使 $\alpha_i<\beta\leqslant\omega_1(\forall i<\omega)$. 而 $(\beta,\omega)\in B$. 因而 (β,ω) 的任何邻域必与 U 相交, 可见 A 与 B 不能邻域分离. □

D. 涉及紧性的例子

已经提到, 对于度量空间, 紧、序列紧、可数紧与聚点紧并无区别(详见定理 3.2.3). 因此, 为说明这些不同紧性的区别, 只有到非度量空间的拓扑空间

中寻找具体例子.

2.5.8 例 设 $J=[0,1]$，在 $X=J^J$ 中采用积拓扑，则

(i) X 是非序列紧的紧空间.

(ii) $Y=\{x\in X:\{x\neq 0\}$ 是可数集$\}$ 是非紧的序列紧空间.

证 (i) 直接由 Tychonoff 定理推出 X 是紧空间. $\forall n\in\mathbf{N}$，定义 $x_n(t)$ 为 t 的二进小数的第 n 位数. 任给 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，必有 $t\in J$，t 的二进小数的第 n_k 位数依次为 $0,1,0,1,\cdots$，因而 $x_{n_k}(t)$ 不收敛. 这表明 X 不是序列紧的.

(ii) 首先说明 $\overline{Y}=X$（因而 Y 不是紧的）. 取定 $x\in X$，以 σ 记 J 的有限子集之全体，σ 依序 $\subset$ 为有向集. 令 $y_A=x\chi_A$，则 $\{y_A:A\in\sigma\}$ 是 Y 中的网. 直接看出 $\chi_A\to 1$，因而 $y_A\to x$. 这表明 $\overline{Y}=X$.

其次说明 Y 是序列紧的. 任给序列 $\{y_n\}\subset Y$，$A\triangleq\bigcup(J\backslash y_n^{-1}(0))$ 是可数集. 用对角线法取出子列 $\{y_{n_k}\}$，使其在 A 上每点收敛，而在 $J\backslash A$ 上 $y_n(t)=0$. 因此 $\{y_{n_k}\}$ 在 J 上处处收敛. 这表明 Y 是序列紧的. □

以上例子同时说明了可数紧空间未必是序列紧的，序列紧空间的积空间未必是序列紧的.

2.5.9 例 在自然数集 $\mathbf{N}$ 上以 $\mathscr{B}=\{(2n-1,n):n\in\mathbf{N}\}$ 为基生成拓扑 τ，则 $(\mathbf{N},\tau)$ 是聚点紧而非可数紧的.

证 (i) $(\mathbf{N},\tau)$ 是聚点紧的：若 $\varnothing\neq A\subset\mathbf{N}$，任取 $n\in A$，则必 $n-1\in A'$ 或 $n+1\in A'$，故 $A'\neq\varnothing$.

(ii) $(\mathbf{N},\tau)$ 不是可数紧的：$\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{N}$ 的一个可数开覆盖，它显然没有有限子覆盖. □

上例中的拓扑 τ，当然不同于 $\mathbf{N}$ 上通常所用的离散拓扑，否则，$(\mathbf{N},\tau)$ 就是度量空间，而不可能聚点紧了.

第3章 度量空间

如我们在§1.4中已初步看到的，以拓扑空间为起点的抽象空间理论，分化为两个大的发展方向：其一是具有相容代数运算的拓扑空间，即拓扑代数系统，其中最主要者是拓扑向量空间(TVS)，它将在第4章中系统考察；其二是能以自然的方式生成拓扑的一致空间与度量空间，这是本章考虑的对象. 鉴于TVS必然是一致空间(某些特殊情况下是度量空间)，一致空间处于更基本的地位. 本章的结论经适当表述之后，可用于TVS，某些处理方法对于解决TVS问题也是有启发的.

§3.1 一致空间

A. 一致拓扑

我们从解决如下基本问题开始：一个一致结构如何自然地生成其一致拓扑?

3.1.1 定理 设$(X,\mathscr{U})$是一个一致空间，则有以下结论：

(i) 在X上存在唯一的T_2拓扑τ，使得依此拓扑，每个$x\in X$的邻域系$\mathscr{N}_x$就是$\{U(x):U\in\mathscr{U}\}$.

上述的τ称为由$\mathscr{U}$生成的一致拓扑，以下在X中总使用一致拓扑.

(ii) 若$\mathscr{B}$是$\mathscr{U}$的基(或子基)，$x\in X$，则

$$\mathscr{B}_x \triangleq \{B(x):B\in\mathscr{B}\}$$

是x的邻域基(或邻域子基). 因此，若$\mathscr{U}$有可数基，则X是第一可数空间.

(iii) 任给$A\subset X, M\subset X\times X$，有闭包公式：

$$\bar{A}=\bigcap\{U(A):U\in\mathscr{U}\}, \tag{1}$$

$$\overline{M}=\bigcap\{U\circ M\circ U:U\in\mathscr{U}\}. \tag{2}$$

式(1)，(2)中的$\mathscr{U}$可代以$\mathscr{U}$的任何基.

(iv) 每个$U\in\mathscr{U}$是对角线Δ在$X\times X$中的邻域，即$\mathscr{U}\subset\mathscr{N}_\Delta$(记号依§2.1(i))，$\mathscr{U}$中的开集(或闭对称集)构成$\mathscr{U}$的基.

证 (i) 令$\mathscr{U}_x=\{U(x):U\in\mathscr{U}\}(x\in X)$. 直接看出$\{\mathscr{U}_x\}$满足定理1.3.7中条件(i)(ii). $\forall U\in\mathscr{U}$，取$V\in\mathscr{U}$，使$V\circ V\subset U$. 若$x\in X, y\in V(x)$，则$V(y)\subset(V\circ V)(x)\subset U(x)$，这表明$\{\mathscr{U}_x\}$满足定理1.3.7中条件(iii). 因此，在$X$上存在唯一拓扑$\tau$，使得依此拓扑，$\mathscr{U}_x$是$x(x\in X)$的邻域基. 若$U\in\mathscr{U}$.

$x \in X, U(x) \subset A \subset X$，则

$$V \triangleq U \cup (\{x\} \times A) \in \mathscr{U}, \quad A = V(x) \in \mathscr{U}_x.$$

这表明 $\mathscr{U}_x$ 是一个滤子(依 1.1.1)，因此 $\mathscr{N}_x = \mathscr{U}_x$.

(ii)是明显的.

(iii) 由闭包的定义知，

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{任给对称的} U \in \mathscr{U}, \text{有} A \cap U(x) \neq \varnothing,$$

后者等价于 $x \in U(A)$，这得出等式(1). 类似地可证(2).

取 $M = \Delta$，从(2)得 $\bar{\Delta} = \Delta$，即 Δ 为闭集. 这就补证了一致拓扑为 T_2 拓扑(参考 2.1.2(iii)).

(iv) 取定 $U \in \mathscr{U}$. 取对称的 $V \in \mathscr{U}$，使 $V \circ V \circ V \subset U$. 若 $(x,y) \in V$，则

$$(x,y) \in V(x) \times V(y) \subset V \circ V \circ V \subset U.$$

这表明 $V \subset U^\circ$，因此 $U^\circ \in \mathscr{U}, \Delta \subset U^\circ$，故 $U \in \mathscr{N}_\Delta$. $\{U^\circ : U \in \mathscr{U}\}$ 显然构成 $\mathscr{U}$ 的一个"开基". 设 U,V 如上，则由式(2)有 $\bar{V} \subset V \circ V \circ V \subset U, \bar{V} \in \mathscr{U}$ 是闭对称集. 这表明 $\mathscr{U}$ 有一个"闭对称基". □

一致拓扑的最明显的特点是：空间 $(X,\mathscr{U})$ 在各点的邻域系是由同一集族 $\mathscr{U}$ 依同一方式"一致地"构成的. 这就决定了，一致空间的局部结构是各处一致的. 这一事实，在 TVS 这种更特殊的一致空间中将变得更加明显.

在 §1.5 中已简略地提到相对一致结构与积一致结构. 下面给出准确的描述，并指明它们与相对拓扑及积拓扑的关系.

3.1.2 命题 (i) 设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间，$\varnothing \neq A \subset X$，则

$$\mathscr{U}_A \triangleq \{(A \times A) \cap U : U \in \mathscr{U}\} \tag{3}$$

是 A 上的一致结构，它生成的一致拓扑就是 A 中的相对拓扑，称 $\mathscr{U}_A$ 为 $\mathscr{U}$ 在 A 中的**相对一致结构**.

(ii) 设 $(X_i, \mathscr{U}_i)(i \in I)$ 是一族一致空间，$X = \prod X_i, P_i : X \to X_i$ 是投影，则以

$$\mathscr{B} \triangleq \bigcup_i (P_i \times P_i)^{-1} \mathscr{U}_i \tag{4}$$

为子基生成 X 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$，它生成的一致拓扑就是 X 上的积拓扑. $\mathscr{U}$ 是 X 上使 P_i 皆一致连续的最小一致结构，称为**积一致结构**. 若(4)中 $\mathscr{U}_i$ 代以 $\mathscr{U}_i$ 的某个子基 $\mathscr{B}_i$，则 $\mathscr{B}$ 仍为积一致结构的子基.

证 (i) 验证 $\mathscr{U}_A$ 满足 1.4.1 中的公理$(U_1) \sim (U_4)$是平凡的. 任给 $U \in \mathscr{U}$，令 $U_A = \{A \times A\} \cap U, \forall x \in A$，有 $U_A(x) = A \cap U(x)$. 这对照 1.5.2(iii)得出：$\mathscr{U}_A$ 在 A 上生成的一致拓扑就是相对拓扑.

(ii) 首先可验证由(4)表出的集族 $\mathscr{B}$ 满足命题 1.4.2 中条件(ii)～(iv)，

因而以 $\mathscr{B}$ 作为子基生成 X 上一个一致结构 $\mathscr{U}$. 直接由 $\mathscr{B}$ 的构成看出，$\mathscr{U}$ 是 X 上使 P_i 皆一致连续的最小一致结构. $\forall x=(x_i)\in X$，有

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_x &\triangleq \{B(x):B\in\mathscr{B}\}\\ &=\{((P_i\times P_i)^{-1}U)(x):U\in\mathscr{U}_i, i\in I\}\\ &=\{P_i^{-1}U(x_i):U\in\mathscr{U}_i, i\in I\}\\ &=\bigcup_i P_i^{-1}\mathscr{A}_{x_i} \qquad (\text{用 } 3.1.1(\mathrm{i})),\end{aligned}$$

这表明 $\mathscr{B}_x$ 是 x 关于积拓扑的邻域子基，因此（参照 3.1.1(ii)），X 上的一致拓扑就是积拓扑. 关于子基 $\mathscr{B}$ 的最后一个断语是显然的. □

今后提到一致空间时，在其中总使用一致拓扑，而在积一致空间中总使用积一致结构. 其次，约定在 **K** 中采用由通常度量

$$d(x,y)=|x-y|$$

生成的一致结构（参看 §1.4B).

B. 伪度量族

设 $(X,\mathscr{U})$ 是一个一致空间. 如在 §1.4A 中已提到的，每个 $U\in\mathscr{U}$ 都为描述 X 中两点的接近程度提供了一个尺度. 问题在于，这种用集做成的尺度毕竟缺乏直观性，我们希望必要时用某种数量化的尺度来取代它. 如在 §1.4B 中看到的，度量是一种理想的尺度，但它只能描述很特殊的一致结构. 在一般情况下，为完全描述一个一致结构，用一族伪度量就够了. 这一基本结论将在 §3.3 中证明（参看 3.3.12)，作为第一步，现在指出伪度量族如何生成一致结构.

首先给出一个预备结果.

3.1.3 引理 设 $(X,\mathscr{U})$ 是一个一致空间，d 是 X 上的一个伪度量（参考定义 1.4.4)，

$$V_{dr}=\{(x,y)\in X\times X:d(x,y)<r\}, \tag{5}$$

则 $d:X\times X\to\mathbf{R}$ 一致连续 $\Leftrightarrow V_{dr}\in\mathscr{U}\ (\forall r>0)$.

证 令 $V_r=\{(s,t)\in\mathbf{R}^2:|s-t|<r\}$. 以 P 与 Q 记 $X\times X$ 到两个因子空间的投影，令 $P_2=P\times P$，Q_2 仿此，则 $X\times X$ 上的积一致结构有一个基

$$\{(P_2^{-1}U)\cap(Q_2^{-1}U):U\in\mathscr{U}\}.$$

约定 $W_U=(P_2^{-1}U)\cap(Q_2^{-1}U)$，则 d 一致连续的充要条件是

$$\forall r>0,\exists U\in\mathscr{U}:(d\times d)W_U\subset V_r. \tag{6}$$

注意到

$$W_U=\{((x,y),(a,b)):(x,a),(y,b)\in U\},$$

知条件(6)相当于：$\forall r>0,\exists U\in\mathscr{U}$，使得

$$(x,a),(y,b) \in U \Rightarrow | d(x,y) - d(a,b) | < r. \qquad (6)'$$

取 $a = y = b$ 从(6)′推出 $U \subset V_{dr}$，因而 $V_{dr} \in \mathscr{U}$. 反之，若 $\forall r > 0$ 有 $V_{dr} \in \mathscr{U}$，取 $U = V_{d,r/2}$，则当 $(x,a),(y,b) \in U$ 时有

$$| d(x,y) - d(a,b) | \leqslant d(x,a) + d(y,b) < r.$$

这表明(6)′满足. 这就证明了引理. □

3.1.4 定理 设 X 是任一非空集，$D = \{d_i : i \in I\}$ 是 X 上的一族伪度量，它分离 X 中的点，即 $x \neq y (x, y \in X) \Rightarrow \exists i \in I$，使得 $d_i(x,y) > 0$. 令

$$\begin{cases} \mathscr{V} = \{V_{ir} : i \in I, r > 0\}, \\ V_{ir} = \{(x,y) \in X \times X : d_i(x,y) < r\}, \end{cases} \qquad (7)$$

则以 $\mathscr{V}$ 为子基生成 X 上一个一致结构 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 是 X 上使每个 d_i 一致连续的最小一致结构. 任给 X 中的网 $\{x_t\}$ 与 $x \in X$，依 X 上的一致拓扑有

$$x_t \to x \Leftrightarrow d_i(x_t, x) \to 0 \qquad (\forall i \in I). \qquad (8)$$

证 由伪度量的性质及 V_{ir} 的定义直接看出

$$V_{ir} = V_{ir}^{-1}, \qquad V_{ir} \circ V_{ir} \subset V_{i,2r}.$$

其次显然 $\Delta = \bigcap \mathscr{V}$. 可见 $\mathscr{V}$ 满足 1.4.2 中条件(ii)～(iv)，因此 $\mathscr{V}$ 生成 X 上一个一致结构 $\mathscr{U}$. 由 3.1.3 及 $\mathscr{V}$ 的构成直接看出，$\mathscr{U}$ 是 X 上使 d_i 皆一致连续的最小一致结构. 注意到 $\{V_{ir}(x) : i \in I, r > 0\}$ 是 $x (\in X)$ 的邻域子基(依 3.1.1(ii))，结论(8)是明显的. □

定理 3.1.4 中的 $\mathscr{U}$ 称为由伪度量族 D 生成的一致结构，可记作 $\mathscr{U}_D$. 也称 D 为一致结构 $\mathscr{U}$ 的一个**生成伪度量族**. 当 $\mathscr{V}$(依(7))是 $\mathscr{U}$ 的基时称 D 为 $\mathscr{U}$ 的**基本伪度量族**. 定理 3.1.4 的逆——任何一致结构必存在基本伪度量族，将在§3.3 中证明(参看 3.3.12). 鉴于此，在考虑某个一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 时，不妨总认定已给出 $\mathscr{U}$ 的某个生成(或基本)伪度量族 D，并充分利用这一工具可能带来的方便. 当然，从逻辑上说，$\mathscr{U}$ 与 D 的作用是等价的. 但运用 D 使得一致空间获得更直观的形象.

下面设 $(X, \mathscr{U})$ 是给定的一致空间，$D = \{d_i : i \in I\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个生成伪度量族. 我们依次考虑一致空间的完备性、全有界性与紧性，三者是基本而互有联系的.

C. 完备性

在§2.2 中我们提到紧性与完备性对于决定极限存在性的价值. 紧性是一种拓扑性质，而完备性则与一致结构有关，后者正是现在要考虑的.

3.1.5 定义 若一个网 $\{x_t\} \subset X$ 满足条件

$$\forall U \in \mathscr{U}, \exists t_0, \forall s,t \geqslant t_0, \text{有} (x_s, x_t) \in U, \qquad (9)$$

则称 $\{x_t\}$ 为 **Cauchy 网**. 若 X 中每个 Cauchy 网收敛，则称 X 为**完备一致空**

间，简称为完备空间. 若 X 中每个 **Cauchy 列**（即 Cauchy 序列）收敛，则称 X 为**序列完备空间**.

显然，可将条件(9)中的"$\forall U\in\mathscr{U}$"换成"$\forall U\in\mathscr{V}$"，$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的某个子基. 特别，可取由(7)表出的 $\mathscr{V}$，而这就得出：$\{x_t\}$ 为 Cauchy 网的充要条件是

$$\lim_{s,t} d_i(x_s,x_t)=0 \qquad (\forall i\in I). \tag{9'}$$

这就使得 Cauchy 网具有一种熟知的直观特征.

容易验证，收敛网必为 Cauchy 网. 另一方面，若 $\{x_t\}$ 是 Cauchy 网，它有一个收敛子网 $\{x_{t_\delta}\}$：$x_{t_\delta}\to x$，则由

$$d_i(x_t,x)\leqslant d_i(x_t,x_{t_\delta})+d_i(x_{t_\delta},x) \qquad (i\in I)$$

及(8)推出 $x_t\to x$. 这就表明，X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中任何 Cauchy 网都有收敛子网. 这一点对于完备性的证明是有用的. 将完备性的上述刻画与紧空间的刻画相对照是颇有启发性的：紧拓扑空间的特征是其中每个网有收敛子网（依 2.2.2），而完备一致空间的特征是其中每个 Cauchy 网有收敛子网. 两者的类似性使人确信，关于紧性的某些结果可改造为关于完备性的类似结果. 以下就是一个例子.

3.1.6 定理　一致空间 X 完备的充要条件是：若 X 中有限相交的闭集族 $\mathscr{A}$ 满足条件

$$\forall U\in\mathscr{U},\ \exists A\in\mathscr{A}, 使\ A\times A\subset U, \tag{10}$$

则 $\bigcap\mathscr{A}\neq\varnothing$.

显然，以上结果可与定理 2.2.2 之(ii)相对照.

证　设 X 完备，$\mathscr{A}$ 是满足条件(10)的有限相交闭集族. 不妨设 $\mathscr{A}=\mathscr{A}^*$. $\forall A\in\mathscr{A}$，取 $x_A\in A$，$\mathscr{A}$ 依 $\supset$ 序向，则 $\{x_A:A\in\mathscr{A}\}$ 是一个网. 由条件(10)直接推出 $\{x_A\}$ 为 Cauchy 网. 设 $x_A\to x$，则显然 $x\in\bigcap\mathscr{A}$.

反之，设 X 满足定理所陈述的条件，$\{x_t\}\subset X$ 是一 Cauchy 网. 令 $A_t=\{x_s:s\geqslant t\}$，则 $\mathscr{A}=\{\bar{A}_t\}$ 是有限相交的闭集族. $\forall U\in\mathscr{U}$，取 $V\in\mathscr{U}$，使 $V\circ V\circ V\subset U$. 由 $\{x_t\}$ 是 Cauchy 网推出对某个 t 有 $A_t\times A_t\subset V$，于是

$$\bar{A}_t\times\bar{A}_t=\overline{A_t\times A_t}\subset V\circ(A_t\times A_t)\circ V_t\subset U \quad (用(2)).$$

可见 $\mathscr{A}$ 满足条件(10)，因而 $\bigcap\bar{A}_t\neq\varnothing$，于是 $\{x_t\}$ 必有收敛子网（参考 2.2.2 之证），因此 X 完备. □

如同条件(9)一样，条件(10)中的"$\forall U\in\mathscr{U}$"亦可改为"$\forall U\in\mathscr{V}$"，$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的某个子基. 因此，条件(10)又等价于：

$$\forall i\in I,\ \forall r>0,\ \exists A\in\mathscr{A}, 使\ \mathrm{diam}_i A<r, \tag{10'}$$

其中 $\mathrm{diam}_i A=\sup\limits_{x,y\in A} d_i(x,y)$（对照 §1.4(5)）.

以下结果是与 2.2.3 相对应的.

3.1.7 命题 (i) 若 X 是完备空间,则 X 的任何闭子空间亦完备, X 的完备子空间必是闭的.

(ii) 若 $X_i(i\in I)$ 是一族完备一致空间,则积一致空间 $X=\prod X_i$ 是完备的.

证 (i)是平凡的,今证(ii). 设 $\{x^t\}$ 是 X 中的 Cauchy 网,则结合(4)与(9)看出 $\{x_i^t\}$ 是 X_i 中的 Cauchy 网($\forall i\in I$). 设 $x_i^t\to x_i(i\in I)$, 则 $x^t\to x=(x_i)$. 这表明 X 完备. □

形式上,3.1.7之(ii)似乎是一个 Tychonoff 定理(2.2.3(ii))型的理想结果,但实际上它是比较平凡的.

D. 全有界性

3.1.8 定义 若 $\forall U\in\mathscr{U}$, 存在有限集 $B\subset X$, 使得 $X=U(B)$, 则称 X 为**全有界空间**;若 $A\subset X$ 作为子空间是全有界的,则称 A 为**全有界集**.

注意 $U(B)=\bigcup\{U(b):b\in B\}$. X 全有界意味着: $\forall U\in\mathscr{U}$, 从 X 的覆盖 $\{U(x):x\in X\}$ 可选出有限子覆盖. 在这个意义上,全有界性是某种"有限覆盖性质",因而与紧性有联系是很自然的. 显然3.1.8中的" $\forall U\in\mathscr{U}$"可改成" $\forall U\in\mathscr{V}$", $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的某个基. 因此,若 D 是一个**基本**伪度量族,则 X 全有界意味着:

$$\begin{cases}\forall d\in D,\forall r>0,\text{存在有限集 } B\subset X,\\ \forall x\in X,\exists b\in B,\text{使 } d(x,b)<r.\end{cases}$$

鉴于在更多的情况下是处理某一致空间中的全有界集,故有必要归纳一下全有界集的某些基本性质.

3.1.9 命题 (i) $A\subset X$ 全有界 $\Leftrightarrow\forall U\in\mathscr{U}$, 存在有限集 $B\subset X$, 使 $A\subset U(B)$.

(ii) 若 $A\subset B\subset X$, B 全有界,则 A 全有界.

(iii) 若 $A,B\subset X$ 全有界,则 $A\cup B$ 全有界.

(iv) 若 $A\subset X$ 全有界,则 $\overline{A}$ 全有界.

(v) 若 $X_i(i\in I)$ 是一族一致空间, $A_i\subset X_i$ 全有界,则 $A\triangleq\prod A_i$ 在 $X=\prod X_i$ 中全有界.

(vi) 若 $F:X\to Y$ 一致连续, $A\subset X$ 全有界,则 FA 在 Y 中全有界.

(vii) 任何 Cauchy 序列 $\{x_n\}\subset X$ 是全有界的.

证 (i) 若 A 全有界,则 $\forall U\in\mathscr{U}$, 存在有限集 $B\subset A$, 使得

$$A=((A\times A)\cap U)(B)=A\cap U(B)\subset U(B).$$

反之, $\forall U\in\mathscr{U}$, 取对称的 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V\circ V\subset U$. 若有有限集 $B=\{b_i\}\subset X$,

使 $A\subset V(B)$，不妨设有 $a_i\in A\cap V(b_i)$．令 $B_1=\{a_i\}$．则

$$A\subset\bigcup_i V(b_i)\subset\bigcup_i (V\circ V)(a_i)\subset U(B_1).$$

这推出 $A=((A\times A)\cap U)(B_1)$，$A$ 是全有界的.

利用(i)，验证(ii)(iii)(vi)(vii)是平凡的.

(iv) $\forall U\in\mathscr{U}$，取 $V\in\mathscr{U}$，使 $V\circ V\subset U$. 由 A 全有界，有有限集 $B\subset X$，使 $A\subset V(B)$. 这结合式(1)得

$$A\subset V(A)\subset(V\circ V)(B)\subset U(B).$$

可见 A 是全有界的.

(v) 依 3.1.2(ii)的记号，取积一致结构中一集

$$U=\bigcap_{k=1}^{n}(P_{i_k}\times P_{i_k})^{-1}U_k,$$

其中 $U_k\in\mathscr{U}_{i_k}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. 取有限集 $B_k\subset X_{i_k}$，使得 $A_{i_k}\subset U_k(B_k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. 对于 $i\in I\setminus\{i_1,\cdots,i_n\}$，取定 $b_i\in X_i$，则

$$B=\prod_{k=1}^{n}B_k\times\prod_{i\neq i_1,\cdots,i_n}\{b_i\}$$

是 X 的有限子集. 不难验证 $A\subset U(B)$，这表明 A 是全有界的.　　□

注意，3.1.9(vii)不能推广为：Cauchy 网是全有界的.

以下定理是将全有界性与完备性、紧性沟通起来的关键.

3.1.10 定理　X 全有界 $\Leftrightarrow$ X 中每个网有 Cauchy 子网.

证　首先设 X 全有界，$\{x_t:t\in T\}$ 是 X 中的网. 令 $A_t=\{x_s:s\geqslant t\}$，则 $\{A_t\}$ 必含于某个极大的滤子(称为**超滤子**)$\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ 有以下性质：若 $A\subset X$，$A\notin\mathcal{A}$，则 $A^c\in\mathcal{A}$. 否则，$\forall B\in\mathcal{A}$，有 $B\not\subset A^c$，从而 $A\cap B\neq\varnothing$，于是 $\mathcal{A}\cup\{A\}$ 生成一个真包含 $\mathcal{A}$ 的滤子，得出矛盾. $\mathcal{A}$ 依序 $\supset$ 是一个有向集. 任给 $\delta=(t,A)\in T\times\mathcal{A}$，由 $A\cap A_t\neq\varnothing$，必有 $t_\delta\geqslant t$，使 $x_{t_\delta}\in A$. 这就得到 $\{x_t\}$ 的子网 $\{x_{t_\delta}\}$. 任给对称的 $U\in\mathscr{U}$，取有限集 $B=\{b_i\}$，使 $X=U(B)$. 令 $B_i=U(b_i)$，必有某个 $B_i\in\mathcal{A}$，否则 $\varnothing=\bigcap B_i^c\in\mathcal{A}$! 固定 $B=B_i\in\mathcal{A}$ 与 $t\in T$，令 $\delta=(t,B)$，则当 $\delta'=(s,A)\geqslant\delta$ 时，有 $x_{t_\delta},x_{t_{\delta'}}\in B=U(b_i)$，这推出 $(x_{t_\delta},x_{t_{\delta'}})\in U\circ U$. 可见 $\{x_{t_\delta}\}$ 是 Cauchy 网.

反之，若 X 非全有界，则有 $U\in\mathscr{U}$，使得对任何有限集 $B\subset X$ 有 $X\neq U(B)$. 任取 $x_1\in X$，次取 $x_2\in X\setminus U(x_1)$，再取

$$x_3\in X\setminus U(\{x_1,x_2\}),\cdots,$$

如此得无穷序列 $\{x_n\}\subset X$，它显然不可能有 Cauchy 子网.　　□

从 3.1.10 显然推出：$A\subset X$ 全有界 $\Leftrightarrow$ A 中每个网有 Cauchy 子网.

E. 紧一致空间

虽然紧性完全是一种拓扑性质，但对于一致拓扑而言，紧性却可以用并非

拓扑性质的全有界性与完备性来刻画.

3.1.11 定理 对一致空间 $(X,\mathscr{U})$,以下条件互相等价:

(i) X 是紧空间;

(ii) X 是全有界的与完备的;

(iii) X 全有界,且对 X 的任何开覆盖 $\mathscr{A}$,存在 $U\in\mathscr{U}$,使得 $\{U(x):x\in X\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细.

证 (i)⇔(ii). 直接由 3.1.10 推出.

(i)⇒(iii). 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. $\forall x\in X$,必有 $U\in\mathscr{U}$,使得 $(U\circ U)(x)<\mathscr{A}$. 由 X 紧,有有限个 $U_i\in\mathscr{U}$ 与 $x_i\in X$,使得 $X=\bigcup U_i(x_i)$,$(U_i\circ U_i)(x_i)<\mathscr{A}$. 令 $U=\bigcap U_i$,则

$$U(x)<\{(U\circ U_i)(x_i)\}<\mathscr{A}\qquad(\forall x\in X).$$

(iii)⇒(i). 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. 由条件(iii),有 $U\in\mathscr{U}$,使 $\{U(x):x\in X\}<\mathscr{A}$. 又有有限集 $B=\{x_i\}$,使 $X=U(B)$. 因 $\{U(x_i)\}<\mathscr{A}$,故 $\mathscr{A}$ 有有限子覆盖. □

结合 3.1.7、3.1.9 与 3.1.11 得出:

3.1.12 推论 设 $A\subset X$,则 A 是紧集⇒A 是全有界闭集,A 是相对紧集⇒A 是全有界集. 若 X 完备,则以上命题的逆命题成立.

3.1.13 命题 设 X 是紧一致空间,$(Y,\mathscr{V})$ 是一致空间,$F\in C(X,Y)$,则 F 一致连续.

证 若 F 非一致连续,则存在开集 $V\in\mathscr{V}$,使得

$$(F\times F)U\not\subset V\qquad(\forall U\in\mathscr{U}).$$

$\forall U\in\mathscr{U}$,取 $(x_U,y_U)\in U$,使 $(Fx_U,Fy_U)\overline{\in}V$. 可设有子网 $\{x_U\}$,使 $x_U\to x$. 易见亦有 $y_U\to x$,于是由 F 连续有 $(Fx,Fx)\overline{\in}V$,得出矛盾. □

3.1.13 显然是经典分析定理"闭区间上的连续函数必一致连续"的推广,而且,此处所用的证法实际上也是熟知的经典方法的一般化.

3.1.14 命题 设 X 是紧一致空间,则 $\mathscr{U}=\mathscr{N}_\Delta$.

证 设 V 是 Δ 的开邻域,今证 $\mathscr{U}\vdash V$(这结合 3.1.1(iv)得出 $\mathscr{U}=\mathscr{N}_\Delta$). 因 $\mathscr{U}$ 有闭基(3.1.1(iv)),故

$$\Delta=\bigcap\{\bar{U}:U=\bar{U}\in\mathscr{U}\}\subset V.$$

由 2.2.2(iii),有有限个闭的 $U_i\in\mathscr{U}$,使得 $U\triangleq\bigcap U_i\subset V$,这得出所要证. □

从命题 3.1.4 推出,对于紧 T_2 空间,至多有一种方法在其中定义一致结构,使其一致拓扑为原拓扑.

§3.2 度量空间

本节设 (X,d) 是给定的度量空间，在 X 中采用由基

$$\begin{cases} \mathscr{V} = \{V_r : r > 0\}, \\ V_r = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < r\} \end{cases} \tag{1}$$

生成的一致结构 $\mathscr{U}$（参考§1.4B）. 关于一致空间的所有概念与结论都可用于度量空间，而且利用度量这一特别直观有效的工具，可以表述得更简单清晰. 还有一些更细致的结论，则是度量空间所独有的. 度量空间与一般一致空间的关键区别在于：度量空间中的一致结构有一可数基 $\{V_{1/n} : n \in \mathbf{N}\}$，因而度量空间中的问题仅用序列就可得到完全的表述.

A. 完备性

若 (X,d) 作为一致空间是完备的，则称 X 为**完备度量空间**，简称为完备空间，而称 d 为 X 上的**完备度量**. 定理 3.1.6 现在取如下更直观的形式.

3.2.1 定理　对于度量空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是完备的；

(ii) X 是序列完备的；

(iii) 若 $\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，$\operatorname{diam} B_n \to 0$，则 $\bigcap B_n \neq \varnothing$.

证　显然(i)⇒(ii). 若 $\{B_n\}$ 如(iii)，取 $x_n \in B_n (n \in \mathbf{N})$，则由 $\operatorname{diam} B_n \to 0$ 推出 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列. 设 $x_n \to x$，则显然 $x \in \bigcap B_n$. 这表明(ii)⇒(iii).

(iii)⇒(i). 设 $\{x_t\} \subset X$ 是一 Cauchy 网，则由§3.1(9)′(取 $d_i = d$)有 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots$，使得

$$d(x_t, x_{t_n}) \leqslant 1/n \qquad (\forall t \geqslant t_n). \tag{2}$$

令 $A_n = \{x_t : t \geqslant t_n\}$，则 $\{\bar{A}_t\}$ 是非空闭集的降列，而由条件(2)推出 $\operatorname{diam} A_n \to 0 (n \to \infty)$. 由条件(iii)有 $x \in \bigcap \bar{A}_n$. 由(2)有 $d(x, x_{t_n}) \leqslant 1/n$. 于是从

$$d(x, x_t) \leqslant 1/n + d(x_{t_n}, x_t) \leqslant 2/n \qquad (\forall t \geqslant t_n)$$

推出 $x_t \to x$. 故 X 是完备的. □

注意定理 3.2.1 条件(iii)中的 $\operatorname{diam} B_n \to 0$ 不可去掉. 例如，取 $X = l^\infty$，

$$B_n = \{(0, \cdots, 0, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in l^\infty : 1 \leqslant |x_i| \leqslant 2 (\forall i \geqslant n)\},$$

则 B_n 是 l^∞ 中非空闭集的降列，但 $\operatorname{diam} B_n \not\to 0$，$\bigcap B_n = \varnothing$.

另一方面，有限维赋范空间中非空有界闭集的降列确有非空交. 因此上面所举的似属病态的例子只能出现在无限维空间中.

与 3.1.7 相当的命题是：

3.2.2 命题　(i) 完备度量空间的闭子空间是完备的，度量空间的完备子

空间是闭的.

(ii) 设 (X_i, d_i) 是可数个度量空间, $X = \prod X_i$, 在 X 中依 §1.5(8)定义度量 d. 则 d 生成 X 上的积一致结构与积拓扑. 若 X_i 皆完备,则 X 亦完备.

证 (i)是明显的,只证(ii). 任给 $x \in X = \prod X_i$, 总以 x_i 表 x 的第 i 坐标. 由公式

$$d(x,y) = \sum_i 2^{-i}[d_i(x_i,y_i) \wedge 1] \qquad (x,y \in X)$$

直接看出 d 是 X 上的一个度量. 其次,由不等式

$$\begin{cases} d_i(x_i,y_i) \wedge 1 \leqslant 2^i d(x,y), \\ d(x,y) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i) + 2^{-n} \end{cases}$$

容易看出,对任何 $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \subset X$, 有

$$d(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 0 \Leftrightarrow d(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}) \to 0 \qquad (n \to \infty, i \in \mathbf{N}).$$

这就表明, d 所生成的一致结构就是积一致结构,因而 d 的度量拓扑就是积拓扑.

关于完备性的结论直接由 3.1.7(ii)推出. □

B. 全有界性与紧性

设 V_r 依式(1),则 $V_r(x) = B_r(x)$ (后一记号依 §1.4(3)). 因此,度量空间 X 是全有界的 $\Leftrightarrow \forall r > 0$, 存在有限集 $\{x_i\} \subset X$, 使得 $X = \bigcup B_r(x_i)$, 即 X 可用任何半径的有限个球覆盖. 利用全有界性,结合 2.2.8, 2.2.9 与 3.1.11, 得到紧度量空间的以下刻画.

3.2.3 定理 对于度量空间 X, 以下条件互相等价:

(i) X 是紧的;

(ii) X 是可数紧的;

(iii) X 中非空闭集的降列有非空交;

(iv) X 是序列紧的,即其中任何序列有收敛子列;

(v) X 是聚点紧的,即其中任何无限子集有聚点;

(vi) X 完备且全有界;

(vii) X 全有界,且 X 的每个开覆盖有形如 $\{B_r(x): x \in X\}$ 的加细(后一结论以 **Lebesgue 覆盖引理**著称).

证 显然(i)⇒(ii), 由 2.2.8 有(ii)⇔(iii), 由 2.2.9 有(ii)⇔(iv)⇔(v), 由 3.1.11 有(i)⇔(vi)⇔(vii). 余下只要证(iv)⇒(vi). 设 X 序列紧. 若 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列,则它必有收敛子列,因而 $\{x_n\}$ 本身收敛. 故 X 完备. 若 X 非全有界,则如 3.1.10 之证的后半部分,存在 $r > 0$ 与序列 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $x_{n+1} \overline{\in}$

$V_r(\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})(\forall n\in\mathbf{N})$. 于是

$$d(x_m,x_n)\geqslant r\qquad(m\neq n).$$

$\{x_n\}$ 显然不能有收敛子列,得出矛盾. □

3.2.4 推论　设 X 是完备度量空间, $A\subset X$, 则以下条件互相等价:

(i) A 是相对紧集(紧集);

(ii) A 中任何序列有收敛子列(且其极限属于 A);

(iii) A 是全有界集(且为闭集).

若不假定 X 完备,则有(i)⇔(ii)⇒(iii).

C. 第二纲性

完备度量空间具有一个一般完备一致空间所没有的独特性质,即第二纲性. 下面首先引进有关的概念.

3.2.5 定义　设 X 是一拓扑空间, $A\subset X$. 若 $(\bar{A})^\circ=\varnothing$, 则称 A 为**疏集**. 疏集的可数并称为**第一纲集**,而非第一纲集称为**第二纲集**. 若 X 本身为第二纲集,则称 X 为 **Baire 空间**, Baire 空间中第一纲集的补集(必为第二纲集)称为**剩余集**.

显然,第一纲集的子集及第一纲集的可数并皆为第一纲集. 若 X 是 Baire 空间,则从它的某个剩余集中任意地除去可数个第一纲集,余下的仍然是第二纲集. 剩余集的这种**不可穷竭性**表明,在 Baire 空间中,第一纲集及其剩余集的关系恰如实数集 $\mathbf{R}$ 中的有理数集与无理数集的关系,二者分别占据了空间的"几乎可忽略部分"与"几乎全部". 这就为抽象地刻画"稀有性"与"一般性"提供了一种拓扑方法. 一般的模式是,如果"状态变元" x 的变域为 Baire 空间 X, 某种状态构成 X 的子集 A, 则当 A 是第一纲集与剩余集时,分别认为该状态是"几乎不出现"与"几乎必然出现"的. 显然,应用上述方法的前提,是能构成适当的 Baire 空间. 下面的定理可满足通常的需要.

3.2.6 定理　完备度量空间与 LCH 是 Baire 空间,其中的剩余集是稠集.

证　下面的论证对完备度量空间 X 进行,对 LCH 应作的改动放在括号中. 设 $A_n\subset X$ 是疏集, $A=\bigcup_1^\infty A_n$, 今证 $A\neq X$, 为此只要证 $A^\circ=\varnothing$. 用反证法,设 $A^\circ\neq\varnothing$. 由 $(\bar{A}_1)^\circ=\varnothing$ 推出 $(\bar{A}_1)^c$ 在 X 中稠密. 于是存在球(非空相对紧开集) B_1, 使得 $\bar{B}_1\subset A^\circ\backslash\bar{A}_1$. 分别以 B_1 与 A_2 代替 A° 与 A_1, 又有球(非空相对紧开集) B_2, 使得 $\bar{B}_2\subset B_1\backslash\bar{A}_2,\cdots$, 如此得到球(非空相对紧开集)的序列 $\{B_n\}$, 使得 $\bar{B}_n\subset B_{n-1}\backslash\bar{A}_n(n\geqslant 1,B_0=A^\circ)$, 可要求 $\mathrm{diam}\,B_n\to 0$. 应用定理 3.2.1(定理 2.2.2),得出 $x\in\bigcap\bar{B}_n$. 但

$$x\in A^\circ\backslash(\bigcup_n\bar{A}_n)\subset A\backslash(\bigcup_n A_n)=\varnothing,$$

得出矛盾. □

3.2.7 推论 (i) 设 X 是 Baire 空间，$A_n \subset X$ 为闭集，$X = \bigcup A_n$，则必有某个 A_n 含内点.

(ii) 设 X 是完备度量空间或 LCH，$G_n \subset X$ 是稠密开(或 G_δ)集，则 $\bigcap G_n$ 是稠密 G_δ 集.

证 (i) 直接由定义 3.2.5 推出.

(ii) 若 $\overline{\bigcap G_n} \neq X$，则由 3.2.6 推出 $\bigcap G_n$ 不是剩余集，因而 $\bigcup G_n^c$ 是第二纲集. 于是 $\exists n \in \mathbf{N}$，使得 $G_n^{co} \neq \varnothing$，这相当于 $\overline{G_n} \neq X$，得出矛盾. □

D. 完备化

如我们已看到的，在很多情况下完备性条件是不可缺少的(参看 3.2.3，3.2.4，3.2.6，3.2.7 等). 这就自然得出结论：应用上有价值的空间应当是完备的. 幸而，下面的定理表明，在某种意义上我们总可以将一给定的度量空间变成完备空间.

3.2.8 定理 设 X 是一度量空间，则存在一完备度量空间 $\bar{X}$ 与一等距映射 $F: X \to \bar{X}$，使得 $\bar{X}$ 就是 FX 的闭包. 这样的 $\bar{X}$ 在等距同构的意义上是唯一的，称为 X 的**完备化**.

证 构造完备化的以下方法是从实数系的构成法引申出来的，其基本思想实际上很简单：X 中的 Cauchy 列"本来"是应收敛的(如此则 X 已完备了)，只是因为空间存在空隙而让极限漏掉了，只要将 Cauchy 列**本身**当作一个元素补入 X，以代替漏去的极限，空间就变成完备了.

以 Y 记 X 中的 Cauchy 列之全体. 当 $\{x_n\}, \{y_n\} \in Y, d(x_n, y_n) \to 0 (n \to \infty)$ 时，约定 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$. 这就在 Y 上定义了一个等价关系 $\sim$，以 $\bar{X}$ 记其商集 $Y/\sim$，以 $[x_n]$ 记 $\{x_n\} \in Y$ 所属的等价类(关于商集参考 §1.2D).

在 $\bar{X}$ 中定义度量如下：

$$d([x_n],[y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n). \tag{3}$$

首先应说明：当 $\{x_n\}, \{y_n\} \in Y$ 时式(3)右端的极限存在，这由以下不等式推出：

$$\begin{aligned} &| d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) | \\ &\leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \to 0 (m, n \to \infty). \end{aligned}$$

其次，若 $\{x'_n\} \sim \{x_n\}, \{y'_n\} \sim \{y_n\}$，则

$$\begin{aligned} &| d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) | \\ &\leqslant d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0 (n \to \infty), \end{aligned}$$

这表明式(3)中的极限与 $\{x_n\} \in [x_n], \{y_n\} \in [y_n]$ 的选择无关. 直接看出(3)定义的 d 是对称的且满足三角不等式. 若 $d([x_n],[y_n]) = 0$，则 $d(x_n, y_n) \to$

0，于是 $\{x_n\}\sim\{y_n\}$，即 $[x_n]=[y_n]$. 因此 d 是 $\bar{X}$ 上的一个度量.

定义等距映射 $F:X\to\bar{X}$ 如下：$\forall x\in X$，以 $\bar{x}$ 记 Cauchy 列 $\{x,x,\cdots,x,\cdots\}$ 所属的等价类，令 $Fx=\bar{x}$. 直接由(3)有

$$d(\bar{x},\bar{y})=d(x,y)\qquad(\forall x,y\in X),$$

可见 F 是等距映射. 任给 $[x_n]\in\bar{X}$，有

$$\lim_m d([x_n],\bar{x}_m)=\lim_m\lim_n d(x_n,x_m)=0,$$

这表明 $\bar{x}_m\to[x_n](m\to\infty)$，因此 $\overline{FX}=\bar{X}$.

现在证 $\bar{X}$ 完备. 设 $\{\xi_n\}$ 是 $\bar{X}$ 中的 Cauchy 列，$\forall n\in\mathbf{N}$，取 $x_n\in X$，使 $d(\bar{x}_n,\xi_n)<1/n$. 由

$$\begin{aligned}d(x_m,x_n)&\leqslant d(\bar{x}_m,\xi_m)+d(\xi_m,\xi_n)+d(\xi_n,\bar{x}_n)\\&<1/m+d(\xi_m,\xi_n)+1/n\to 0\qquad(m,n\to\infty)\end{aligned}$$

知 $\{x_n\}\in Y$，于是 $\xi=[x_n]\in\bar{X}$. 由

$$d(\xi_n,\xi)\leqslant d(\xi_n,\bar{x}_n)+d(\bar{x}_n,\xi)$$

看出在 $\bar{X}$ 中 $\xi_n\to\xi$，故 $\bar{X}$ 完备.

最后证唯一性. 设 Z 是一完备度量空间，$G:X\to Z$ 是一等距映射，$\overline{GX}=Z$. 定义

$$T:FX\to GX,\qquad Fx\to Gx,$$

则 T 是一个等距映射. 任给 $\xi\in\bar{X}$，取 $\{x_n\}\in\xi$，则 $\{Gx_n\}$ 是 Cauchy 列，定义 $T\xi=\lim_n Gx_n\in Z$. 可验证这样定义的 $T\xi$ 与 $\{x_n\}$ 的选择无关，这就得到映射 $T:\bar{X}\to Z$. 若 $\xi,\eta\in\bar{X}$，$\{x_n\}\in\xi$，$\{y_n\}\in\eta$，则

$$\begin{aligned}d(T\xi,T\eta)&=\lim_n d(Gx_n,Gy_n)\\&=\lim_n d(x_n,y_n)=d(\xi,\eta),\end{aligned}$$

故 T 为等距映射. $\forall z\in Z$，必有 $\{x_n\}\subset X$，使 $Gx_n\to z$，于是 $z=T[x_n]$，可见 $T\bar{X}=Z$，故 T 是等距同构. □

在抽象空间理论中，类似的方法用来构成其他一些空间(如赋范空间、赋范代数等)的完备化. 因基本原理是一样的，今后将不再重复类似的构造.

§3.3　度量化问题

A. 可度量化拓扑

为讨论方便，首先给出以下定义.

3.3.1 定义　设 (X,τ) 是一个拓扑空间. 若 τ 是 X 上某个度量 d 的度量拓扑，则称 τ 为**可度量化拓扑**，而称 X 为可度量化拓扑空间，简称为**可度量化空间**.

一旦能断定某个拓扑空间是可度量化的，就可将有关度量拓扑的所有结论应用于该空间，而且可以选用某个适当的度量来处理该空间中的拓扑问题，而不论该拓扑的最初来源是否联系于某个度量. 可度量化概念的好处，主要即在于此.

虽然可度量化概念的表述中涉及度量，但它是一个拓扑概念，原则上可从纯粹的拓扑考虑作出判断，而不依赖于特定度量的选择. 对于可度量化拓扑的运用来说，关键的事实是某个相容度量的存在性，至于是否应具体构造出这一度量，则决定于问题的具体需要，未必总是重要的.

关键的问题是可度量化的判定. 否定判断通常是容易的：指出所讨论的拓扑不具备度量拓扑的某个性质就够了. 例如，已知度量拓扑具有§2.1 中所述的全部分离性质（从 T_0 到 T_6），因而缺少这些性质中的任何一个的拓扑必不可度量化. 类似地，可将所有不满足第一可数性公理的拓扑排除在可度量化拓扑之外.

对"可度量化"作出肯定判断，通常就不那么容易，求出可度量化的充要条件，则是个更深刻的问题. 值得庆幸的是，此问题已获完全解决，本节将给出其结果. 即使有了这些可度量化条件，将它们用于某一特定空间也未必容易成功. 在某些情况下，如下的简单命题对于可度量化判别是有帮助的.

3.3.2 命题 "可度量化性"是遗传的、可数可乘的.

遗传性是明显的，可数可乘性则依据 3.2.2(ii).

B. 可分度量空间

现在我们着手求出可度化的条件. 这一问题分两步解决：在给出一般的解答之前，先解决一个较容易的特殊问题：可度量化的可分空间的特征是什么？可分性的定义如下：

3.3.3 定义 设 X 是一拓扑空间. 若存在可数集在 X 中稠密，则称 X 为**可分空间**；若 $A\subset X$ 作为子空间是可分的，则称 A 为**可分集**.

可分性的意义在于：在一个可数稠子集上往往较容易获得某些所期待的结论，而这种结论有可能通过一个极限过程过渡到全空间. 可以说，在某种意义上可分空间"比较小"，正如通常认为有可数基的拓扑"比较小"一样. 实际上，可分性与第二可数性确有很强的联系.

3.3.4 命题 第二可数的拓扑空间是可分的，可分度量空间是第二可数的.

证 若 X 是有可数拓扑基 $\{B_n\}$ 的拓扑空间，任取 $b_n\in B_n(\forall n\in\mathbf{N})$，则显然 $\{b_n\}$ 在 X 中稠密，因而 X 可分.

若 X 是有可数稠子集 $\{x_n\}$ 的度量空间，则

$$\mathscr{B} \triangleq \{B_{1/m}(x_n): m, n \in \mathbf{N}\}$$

是 X 的一个可数拓扑基：$\forall x \in X, r > 0$，取 $m \in \mathbf{N}$，使 $2/m < r$；取 $x_n \in B_{1/m}(x)$，则可验证 $x \in B_{1/m}(x_n) \subset B_r(x)$，这表明 $\mathscr{B}$ 是拓扑基.

3.3.5 命题　(i) 可分拓扑空间中的开子集是可分的，可分度量空间中任何子集是可分的.

(ii) 若 $X_i (i \in I)$ 是一族可分拓扑空间，I 的基数不超过 $\mathbf{R}$ 的基数，则积空间 $X = \prod X_i$ 是可分的，特别，空间 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 是可分的.

(iii) 若 X, Y 是拓扑空间，$F \in C(X, Y)$，$A \subset X$ 可分，则 FA 可分.

证　(i) 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的可数稠子集，$A \subset X$ 是开集，则显然 $A \cap \{x_n\}$ 在 A 中稠密，因而 A 是可分的. 关于度量空间的结论由 3.3.4 及第二可数性的遗传性(1.5.11(i))推出.

(ii)的证明不太简单，一个特殊情况的证明参看[11, p. 55].

(iii)的证明是平凡的. □

3.3.6 命题　度量空间中的全有界集与相对紧集皆为可分集.

证　只要证全有界的度量空间 X 是可分的. $\forall n \in \mathbf{N}$，取有限集 $A_n \subset X$，使 $X = \bigcup \{B_{1/n}(x): x \in A_n\}$，则 $A = \bigcup A_n$ 是 X 的可数稠子集：$\forall x \in X, r > 0$，取 $n \in \mathbf{N}$，使 $1/n < r$；取 $y \in A_n$，使 $x \in B_{1/n}(y)$，则 $y \in B_{1/n}(x) \subset B_r(x)$. □

3.3.7 定理(Urysohn)　对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是可分的可度量化空间；

(ii) X 是第二可数的正则空间；

(iii) X 可拓扑嵌入 J^ω，$J = [0, 1]$.

证　(i)⇒(ii)是平凡的(用 3.3.4).

(ii)⇒(iii). 若 X 是第二可数的正则空间，则 X 是全正则的(依定理 2.1.11)，因此由 2.1.8 有 $X \subset J^\omega$ (拓扑嵌入).

(iii)⇒(i). J^ω 是可度量化的紧空间(用命题 3.3.2)，因而可分(用 3.3.6 或 3.3.5(ii))，于是 J^ω 的子空间是可分的可度量化空间. □

3.3.8 推论　(i) X 是紧的可度量化空间⇔ X 同胚于 J^ω 的某个闭子空间⇔ X 是第二可数的紧 T_2 空间.

(ii) X 是可分的可度量化空间 ⇔ X 同胚于某个紧度量空间的稠密子空间.

(iii) 若 X 是可分可度量化空间，则 $|X| \leqslant |\mathbf{R}|$.

(iv) 设 X 是紧拓扑空间，存在可数集 $F \subset C(X)$ 分离 X 中的点，则 X 是可分的可度量化空间.

利用 3.3.7(并结合 2.2.3,2.2.4(iv),2.2.6),以上结论的证明是直接的.

C. 一般度量化定理

现在将定理 3.3.7 推广为一个一般的度量化定理,关键是将定理 3.3.7(ii)中的可数拓扑基条件推广为一个适当的一般性条件,这依赖于局部有限族概念(参考 §2.4A). 首先建立以下预备性结果:

3.3.9 定理(Stone 1948) 设 X 是度量空间,则 X 的任何开覆盖有 σ-离散的开加细,因而 X 是仿紧的.

证 取定 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha<\mu}$,$\alpha$ 是序数,今要构成 $\mathscr{U}$ 的一个 σ-离散的开加细. 构作过程不算太复杂,但颇具技巧性. $\forall\alpha<\mu,n\in\mathbf{N}$,作如下一列集:

$$U_{\alpha n}=\{x\in X:d(x,U_\alpha^c)\geqslant 2^{-n}\},\tag{1}$$

$$V_{\alpha n}=U_{\alpha n}\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}U_{\beta,n+1},\tag{2}$$

$$W_{\alpha n}=\{x\in X:d(x,V_{\alpha n})<2^{-n-3}\}.\tag{3}$$

令 $\mathscr{W}_n=\{W_{\alpha n}\}_{\alpha<\mu}$,今证 $\mathscr{W}\triangleq\bigcup\mathscr{W}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ-离散开加细.

首先证 $\mathscr{W}$ 覆盖 X. 显然 $U_\alpha=\bigcup\limits_n U_{\alpha n}$,$\forall x\in X$,取最小的 $\alpha<\mu$,使得 $\exists n\in\mathbf{N}$,使 $x\in U_{\alpha n}$,因而 $x\in V_{\alpha n}\subset W_{\alpha n}\subset\mathscr{W}^\sigma$.

其次证 $\mathscr{W}_n$ 是离散族. 取定 $\beta<\alpha<\mu$,今指明

$$d(V_{\beta n},V_{\alpha n})\geqslant 2^{-n-1}.\tag{4}$$

事实上,$\forall x\in V_{\alpha n},y\in V_{\beta n}$,有 $x\in U_{\alpha n}\setminus U_{\beta,n+1},y\in U_{\beta n}$(用(2)),故

$$\begin{aligned}d(x,y)&\geqslant d(y,U_\beta^c)-d(x,U_\beta^c)\\&\geqslant 2^{-n}-2^{-n-1}=2^{-n-1}\qquad(\text{用}(1)),\end{aligned}$$

这得出(4). 进而可从(4)推出

$$d(W_{\alpha n},W_{\beta n})\geqslant 2^{-n-2}$$

(这蕴涵了 $\mathscr{W}_n$ 为离散族): $\forall x\in\in W_{\alpha n},y\in W_{\beta n}$,取 $x'\in V_{\alpha n},y'\in V_{\beta n}$,使 $d(x,x')<2^{-n-3},d(y,y')<2^{-n-3}$,则

$$\begin{aligned}d(x,y)&\geqslant d(x',y')-d(x,x')-d(y,y')\\&\geqslant 2^{-n-1}-2^{-n-2}=2^{-n-2}\quad(\text{用}(4)).\end{aligned}$$

最后证 $\mathscr{W}<\mathscr{U}$,只要证 $W_{\alpha n}\subset U_{\alpha,n+1}(\alpha<\mu,n\in\mathbf{N})$. $\forall x\in W_{\alpha n}$,取 $y\in V_{\alpha n}$,使 $d(x,y)<2^{-n-3}$,则

$$\begin{aligned}d(x,U_\alpha^c)&\geqslant d(y,U_\alpha^c)-d(x,y)\\&\geqslant 2^{-n}-2^{-n-3}>2^{-n-1},\end{aligned}$$

这推出 $x\in U_{\alpha,n+1}$.

综上，$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ - 离散开加细. 由 2.4.7(iv)，X 是仿紧的. □

现在已可证明以下著名的度量化定理，它是由 Bing，Nagata 以及 Smirnov 在 1950 年前后建立的.

3.3.10 定理　对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是可度量化空间；

(ii) X 是正则空间且有 σ - 离散拓扑基；

(iii) X 是正则空间且有 σ - 局部有限拓扑基.

注 3.3.1　可数拓扑基平凡地是 σ - 离散或 σ - 局部有限拓扑基. 这就显示出，定理 3.3.10 是 3.3.7 的一般化.

证　(i)⇒(ii). 设 X 是度量空间. $\forall n\in\mathbf{N}$，X 的开覆盖 $\{B_{1/n}(x):x\in X\}$ 有 σ - 离散的开加细 $\mathscr{B}_n$ (用 3.3.9). $\bigcup\mathscr{B}_n$ 就是 X 的一个 σ - 离散拓扑基：$\forall x\in X, r>0$，取 $n\in\mathbf{N}$，使 $2/n<r$；取 $B\in\mathscr{B}_n$，使 $x\in B\subset B_{1/n}(y)$，则 $x\in B\subset B_r(x)$.

(ii)⇒(iii)是平凡的.

(iii)⇒(i). 这是证明的核心部分. 设 $\mathscr{B}=\bigcup\mathscr{B}_n$ 是 X 的拓扑基，每个 $\mathscr{B}_n$ 是局部有限的. 显然 X 的任何开覆盖都有 σ - 局部有限开加细，故 X 是仿紧的(2.4.7)，因而是正规的(2.4.6). 令

$$V_{n,B}=\bigcup\{A\in\mathscr{B}_n:\bar{A}\subset B\}\quad(B\in\mathscr{B}).\tag{5}$$

由 $\mathscr{B}_n$ 局部有限与式(5)看出 $\bar{V}_{n,B}\subset B$ (用 2.4.2(i)). 取 $f\in C(X)$，使得 $V_{n,B}<f_{n,B}<B$ (用 2.1.10(iii)). 定义

$$\begin{cases}d_{nm}(x,y)=\sum\limits_{B\in\mathscr{B}_m}|f_{n,B}(x)-f_{n,B}(y)|,\\ d(x,y)=\sum\limits_{m,n}2^{-m-n}[d_{nm}(x,y)\wedge 1].\end{cases}\tag{6}$$

由 $\mathscr{B}_m$ 局部有限及 $\operatorname{supp} f_{n,B}\subset B$ 知式(6)中的 $d_{nm}(x,y)$ 有定义. 直接看出 $d(x,y)$ 是对称的且满足三角不等式. 若 $x,y\in X, x\neq y$，则 $\exists m\in\mathbf{N}, B\in\mathscr{B}_m$，使 $x\in B, y\overline{\in} B$，进而有 $n\in\mathbf{N}, A\in\mathscr{B}_n$，使 $x\in A\subset\bar{A}\subset B$. 故 $x\in V_{n,B}$，于是 $d_{nm}(x,y)\geq 1, d(x,y)>0$. 因此 d 是 X 上的一个度量.

余下证明 d 生成 X 上的原拓扑，即对任给网 $\{x_t\}\subset X, x\in X$，有 $x_t\to x\Leftrightarrow d(x_t,x)\to 0$. 首先，若 $x_t\to x$，则

$$f_{n,B}(x_t)\to f_{n,B}(x)\qquad(\forall n\in\mathbf{N}, B\in\mathscr{B}).$$

于是由(6)看出 $d_{nm}(x_t,x)\to 0(\forall m,n\in\mathbf{N})$，从而 $d(x_t,x)\to 0$. 反之，若 $x_t\not\to x$，则有 $m\in\mathbf{N}$ 与 $B\in\mathscr{B}_m$，使 $x\in B$，而某个共尾子网 $\{x_{t'}\}\subset B^c$. 取 $n\in\mathbf{N}, A\in\mathscr{B}_n$，使 $x\in A\subset\bar{A}\subset B$，则 $f_{n,B}(x)=1, f_{n,B}(x_{t'})=0$，于是 $d_{nm}(x_{t'},x)\geq 1$，这表明 $d(x_t,x)\not\to 0$. □

D. 一致空间的度量化

给定一致空间 $(X,\mathscr{U})$. 若 $\mathscr{U}$ 可由某个度量 d 生成，则称 $\mathscr{U}$ 为可度量化一致结构，而称 X 为可度量化一致空间. 若 $\mathscr{U}$ 可度量化，则由 $\mathscr{U}$ 生成的一致拓扑显然亦可度量化. 不过，因同一拓扑可由很不相同的一致结构生成，故 X 作为拓扑空间的可度量化与其作为一致空间的可度量化并不是一回事. 实际上，与颇为深刻的定理 3.3.10 相对照，一致空间可度量化问题的解决要容易些. 下面就是所要的结论.

3.3.11 定理(Alexandroff-Urysohn 1925) 一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 可度量化 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{U}$ 有一个可数基.

证 条件的必要性是平凡的，只要证充分性. 设 $\mathscr{U}$ 有可数基 $\{U_n\}$，今要构成与 $\mathscr{U}$ 相容的度量 d. 不妨设 U_n 是对称的且

$$U_n\circ U_n\circ U_n\subset U_{n-1}\qquad(n\geqslant 1),$$

约定 $U_0=X\times X$. 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}2^{-n}, & (x,y)\in U_n\backslash U_{n+1},n\geqslant 0,\\ 0, & x=y,\end{cases}\tag{7}$$

$$d(x,y)=\inf\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1},x_i),\tag{8}$$

(8)式右端的 inf 是对 X 中所有满足 $x_0=x,x_n=y$ 的有限序列 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 取的. 为简便起见，下面约定将(8)中的和式写作 $\sum_x^y$.

首先证 d 是一个度量. 直接看出 f 与 d 是对称的(注意 U_n 是对称集). 其次，$\forall x,y,z\in X$，有

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\inf\sum_x^y\leqslant\inf\left(\sum_x^z+\sum_z^y\right)\\&=\inf\sum_x^z+\inf\sum_z^y\\&=d(x,z)+d(z,y).\end{aligned}$$

显然 $d(x,x)=0$. 至于“ $x\neq y\Rightarrow d(x,y)>0$ ”，则由下面的式(9)自动推出.

其次证 d 生成 $\mathscr{U}$，为此只要证

$$V_{1/2^{n+1}}\subset U_n\subset V_{1/2^{n-1}}\quad(n\geqslant 1),\tag{9}$$

$V_r(r>0)$ 依 §3.2(1). 由 $d(x,y)\leqslant f(x,y)$ 直接推出 $U_n\subset V_{1/2^{n-1}}$. 余下只要证 $f(x,y)\leqslant 2d(x,y)$. 取定点组 $x=x_0,x_1,\cdots,x_n=y$，令 $a=\sum_1^n f(x_{i-1},x_i)$，今证 $f(x,y)\leqslant 2a$，可设 $a>0$. 对 n 用归纳法. 取 $m\in\mathbf{N}$，使 $2^{-m}\leqslant a<2^{1-m}$. 可设 $m>1$ (否则 $f\leqslant 1\leqslant 2a$)，取最大的 k，使 $\sum_1^{k-1}f(x_{i-1},x_i)\leqslant a/2$，则

$$\sum_{i=k+1}^{n} f(x_{i-1},x_i) = a - \sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1},x_i) < \frac{a}{2}. \tag{10}$$

用归纳假设得

$$f(x,x_{k-1}) \leqslant 2\sum_{i=1}^{k-1} f(x_{i-1},x_i) \leqslant a;$$

$$f(x_k,y) \leqslant 2\sum_{i=k+1}^{n} f(x_{i-1},x_i) < a.$$

其次显然 $f(x_{k-1},x_k)\leqslant a$. 于是 $(x,y)\in U_m\circ U_m\circ U_m\subset U_{m-1}$，这推出 $f(x,y)\leqslant 2^{1-m}\leqslant 2a$，如所要证. □

定理 3.3.11 表明，一致结构可度量化是一个限制性很强的条件. 因此，在一般情况下不能指望 $\mathscr{U}$ 由一个度量生成. 但要求 $\mathscr{U}$ 由一族伪度量生成，则总是可能的. 以下结果可看作定理 3.1.4 的逆.

3.3.12 定理　设 P 是一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 上一致连续的伪度量之全体，则 P 是生成 $\mathscr{U}$ 的一个基本伪度量族.

定理所述的 P 称为生成 $\mathscr{U}$ 的**格集**(gage).

证　注意 P 非空，$d=0$ 就属于 P. 以 $\mathscr{U}_P$ 记 P 生成的一致结构（暂且不肯定它是分离的）. 今证 $\mathscr{U}=\mathscr{U}_P$. $\forall d\in P$，由 d 在 $(X,\mathscr{U})$ 上一致连续推出 $V_{dr}\in\mathscr{U}$（用 3.1.3），V_{dr} 依 § 3.1(5). 因 $\mathscr{U}_P$ 由

$$\mathscr{V}\triangleq\{V_{dr}:d\in P,r>0\}$$

生成(3.1.4)，故 $\mathscr{U}_P\subset\mathscr{U}$. 余下只要证 $\mathscr{V}\vdash\mathscr{U}$（这推出 $\mathscr{U}=\mathscr{U}_P$，因而 P 是生成 $\mathscr{U}$ 的基本伪度量族）. 取定 $U\in\mathscr{U}$，令 $U_1=U\cap U^{-1}$，作 $\mathscr{U}$ 中的对称集的序列 $\{U_n\}$，使得 $U_n\circ U_n\circ U_n\subset U_{n-1}(n\geqslant 1,U_0=X\times X)$，则如 3.3.11 之证，可构成 X 上的一个伪度量 d，使得（参照(9)）

$$V_{d,2^{-1-n}}\subset U_n\subset V_{d,2^{1-n}}\quad (n\geqslant 1).$$

这表明 d 一致连续，因而 $d\in P$，且 $\mathscr{V}\vdash U$，如所要证. □

显然，格集 P 是生成 $\mathscr{U}$ 的最大伪度量族，$\mathscr{U}$ 的任何生成伪度量族都可以扩张为一个基本伪度量族.

类似于度量化，可提出“一致化”的问题：一个给定的拓扑成为一致拓扑的条件是什么？利用定理 3.3.12，这一问题有很简单的解答.

3.3.13 推论　设 (X,τ) 是一拓扑空间，则 τ 是一致拓扑的充要条件是 X 是全正则的.

证　若 τ 由某个一致结构 $\mathscr{U}$ 生成，P 是 $\mathscr{U}$ 的格集，$x\in X,d\in P,f_d=d(x,\cdot)$，则 $f_d\in C(X)$，

$$V_{dr}(x)=\{f_d<r\}\qquad(\forall r>0),$$

V_{dr} 依 § 3.1(5). 这表明形如 $\{f_d<r\}(d\in P,r>0)$ 的余零集构成 X 的拓扑

基，因此 X 是全正则的（依 2.1.6）.

反之，若 X 是全正则的，则有拓扑嵌入 $F: X \to J^{\Omega}$，$J=[0,1]$，Ω 是某个非空集（2.1.8）. FX 是一个一致空间（3.1.2），以 $\mathscr{V}$ 记其一致结构，则 $\mathscr{U} \triangleq F^{-1}\mathscr{V}$ 是X上的一致结构，且 $F:(X,\mathscr{U}) \to (FX,\mathscr{V})$ 是一致同构. 若以 τ_u 记 $\mathscr{U}$ 的一致拓扑，则 $F:(X,\tau_u) \to FX$ 必为同胚（用命题 1.4.3），因而 $\tau_u = \tau$，可见 τ 是一致拓扑. □

鉴于常用的抽象空间（如 TVS，拓扑代数等）都是一致空间，全正则空间在抽象空间理论中具有普遍价值，是理所当然的.

第 4 章　拓扑向量空间

前两章所考虑的抽象空间固然是非常基本的，但因其不涉及任何代数运算，深入的发展必然很受限制. 现在进入抽象空间理论的一个主要方向：拓扑向量空间（TVS）理论. TVS 一方面继承了一般拓扑空间与一致空间的全部性质，同时又因其拓扑结构与向量空间结构的结合而导向更精细的结果，因而成为更有价值的抽象空间. 大多数常用的抽象空间，都具有 TVS 的形式，或以 TVS 为其背景，可以说，TVS 为现代分析数学提供了最主要的空间框架，其重要性是不言而喻的.

TVS 的基本特点是其结构完全决定于局部基，因而在本章中运用局部基的技巧是关键的. 不过，只要有可能，我们就运用诸如半范、准范与范数等更直观方便的度量工具. 相应地，在本章中局部凸空间、赋准范空间与赋范空间将受到一定关注. 不过，我们将始终以 TVS 为统一背景，只是在适当场合指出，对特殊类型的 TVS 能得出哪些更强的结果.

在本章中，只要未加说明，X,Y 等就记 $\mathbf{K}$ 上的 TVS，在同一问题中涉及的 $\mathbf{K}$ 是一样的.

§4.1　向量拓扑

在这个带预备性质的第一节中，我们尽可能详尽地给出有关 TVS 的各种初等事实，以备后面引用. 不过，凡属直接的证明都予省略.

A. 局部基

如已指明的，TVS 结构完全由其局部基所决定. 因此，给出局部基所应满足的条件具有基本意义.

4.1.1 定理　若 X 是 $\mathbf{K}$ 上的 TVS，$\mathscr{B}$ 是 X 上的一个局部基（特别，$\mathscr{B}$ 可以是 X 的 0-邻域系），则 $\mathscr{B}$ 满足以下条件：

(i) $\forall A,B\in\mathscr{B}$，有 $\mathscr{B}\vdash A\cap B$；

(ii) $\bigcap\mathscr{B}=\{0\}$；

(iii) $\forall A\in\mathscr{B}$，$\exists B\in\mathscr{B}$，使 $B+B\subset A$；

(iv) $\forall A\in\mathscr{B}$，$\exists B\in\mathscr{B}$，使 $\alpha B\subset A(|\alpha|\leqslant 1)$；

(v) $\forall A\in\mathscr{B}$，有 $X=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{K}}\alpha A$.

反之,若 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,集族 $\mathscr{B}\subset 2^X$ 满足以上条件(i)～(v),则 X 上存在唯一以 $\mathscr{B}$ 为局部基的向量拓扑.

证 条件(i)～(v)的验证是平凡的. 例如,条件(v)的验证如下:给定 $A\in\mathscr{B}$, $x\in X$, 由数乘运算的连续性及 $0\cdot x=0$, 知当 $\beta\in\mathbf{K}$, $|\beta|$ 充分小时 $\beta x\in A$, 因而 $x\in\beta^{-1}A$. 这表明 $X=\bigcup_{A\in\mathbf{K}}\alpha A$.

下面证明逆命题. 设 $\mathscr{B}$ 满足条件(i)～(v). 令 $\mathscr{B}_x=\{x+B:B\in\mathscr{B}\}$, 今指明 $\{\mathscr{B}_x:x\in X\}$ 满足定理 1.3.7 中条件(i)～(iii). 条件(i)(ii)是明显的. (iii)的验证如下: $\forall x\in X, A\in\mathscr{B}$, 取 $B\in\mathscr{B}$, 使 $B+B\subset A$, 则 $\forall y\in x+B$, 有 $y+B\in\mathscr{B}_y$,

$$y+B\subset x+B+B\subset x+A.$$

于是,由定理 1.3.7 有 X 上的唯一拓扑 τ, 使得 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基. 若 $x,y\in X$, $x\neq y$, 则由本定理中的条件(ii),有 $A\in\mathscr{B}$ 使 $x-y\,\overline{\in}\,A$. 取 $B\in\mathscr{B}$ 使 $B+B\subset A$, 则易验证 $x-B$ 与 $y+B$ 是分离 x 与 y 的邻域. 故 τ 是 T_2 拓扑. 直接看出依拓扑 τ 加法是连续的. 给定 $\alpha\in\mathbf{K}$, $x\in X$, $A\in\mathscr{B}$, 取 $n\in\mathbf{N}$, 使 $n>|\alpha|+1$; 重复应用条件(iii)可得出 $B\in\mathscr{B}$, 使 n 个 B 的和 $B+B+\cdots+B\subset A$; 取 $C\in\mathscr{B}$, 使 $\beta C\subset B(|\beta|\leqslant 1)$; 取 $\lambda\in\mathbf{K}$, 使 $x\in\lambda C$, 则当 $\beta\in\mathbf{K}$, $|\beta-\alpha|$ 充分小时有

$$\begin{aligned}\beta(x+C)&=\alpha x+(\beta-\alpha)x+\beta C\\&\subset\alpha x+(\beta-\alpha)\lambda C+\beta C\\&\subset\alpha x+B+(n-1)B\\&\subset\alpha x+A,\end{aligned}$$

这表明数乘运算连续. 因此, τ 是 X 上的以 $\mathscr{B}$ 为局部基的唯一向量拓扑. □

定理 4.1.1 的价值在于,在定义某个 TVS 时,只需给出一个满足 4.1.1 中条件(i)～(v)的局部基 $\mathscr{B}$ 就行了,而无需实际给出拓扑的构成及验证运算的连续性,这两者通常都是繁琐费事的.

以下 X 总记 $\mathbf{K}$ 上的 TVS 而不再处处说明.

下面指出,在 X 中存在满足某些特殊条件的局部基,这些结论为局部基概念的应用带来很大方便.

4.1.2 命题 X 中的以下集族都构成局部基:

(i) 平衡 0-邻域之全体;

(ii) 对称 0-邻域之全体;

(iii) 闭(或开)0-邻域之全体;

(iv) 闭(或开)平衡 0-邻域之全体.

证 大部分结论的证明是直接的,不妨只证(iv). 任给 0-邻域 V, 由正则性(注意 X 作为一致空间是正则的),有闭 0-邻域 $B\subset V$. 取 0-邻域 U, 使 αU

$\subset B(|\alpha| \leqslant 1)$. 令 $W = \bigcup_{|\alpha| \leqslant 1} \alpha U$，则 $\overline{W}$ 是闭的平衡 0-邻域且 $\overline{W} \subset B \subset A$. □

处理 TVS 问题的一种常见模式是：取定一个适当的局部基 $\mathscr{B}$，然后验证每个 $B \in \mathscr{B}$ 满足某个条件. B 的性质愈好，通常验证就愈简单. 由于有 4.1.2，只要考虑平衡或闭 0-邻域就行了. 若结合利用 4.1.1 之条件(iii)，则只要考虑形如 $B+B$ 的 0-邻域，其中 B 是平衡(或闭、闭平衡等)0-邻域就够了. 对于后面就要考虑的局部凸空间，可进而假定 B 是凸或绝对凸 0-邻域. 以上考虑将贯穿于本章各节而不另加说明.

如在 § 1.4C 中指出的，以

$$\begin{cases} \mathscr{V} = \{V_A : A \in \mathscr{N}\}, \\ V_A = \{(x,y) \in X \times X : y - x \in A\} \end{cases} \tag{1}$$

为基生成 X 上一个一致结构 $\mathscr{U}$，其中 $\mathscr{N}$ 是 X 的 0-邻域系，$\mathscr{U}$ 生成的一致拓扑就是 X 上的原拓扑. 若以某个局部基(或子基) $\mathscr{B}$ 代替 $\mathscr{N}$，则所得的 $\{V_B : B \in \mathscr{B}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基(或子基). § 3.1 中对一般一致空间所提出的概念与结论，都可用于 TVS，而且利用局部基可表述得更好. 例如，注意到 $V_B(A) = A + B$，§ 3.1 中的公式(1)现在成为

$$\overline{A} = \bigcap \{A + B : B \in \mathscr{B}\} \qquad (A \subset X), \tag{2}$$

$\mathscr{B}$ 是 X 的某个局部基. 由 § 3.1(9)所表达的 Cauchy 网条件可改写成：

$$\forall B \in \mathscr{B}, \exists t_0, \forall s,t \geqslant t_0, 有\ x_s - x_t \in B,$$

这相当于

$$\lim_{s,t}(x_s - x_t) = 0. \tag{3}$$

(3)称之为 **Cauchy 条件**，它已很接近于通常的 Cauchy 条件.

应强调的是，TVS 中的一致结构完全决定于空间中的向量拓扑. 像全有界性、Cauchy 网、完备性这类“一致性”概念，在 TVS 中实际上是拓扑概念，它们可用局部基得到完全的刻画，而且在拓扑同构(参看 § 1.4C)变换下保持不变.

B. TVS 中的点集

在 § 1.3 中建立了一般拓扑空间中的点集论. 由于有拓扑运算(如运算 $A \to \overline{A}$)与代数运算的结合，TVS 中的点集论内容更为丰富. 首先，由线性运算的连续性直接推出公式：

$$\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}, \tag{4}$$

$$A^\circ + B^\circ \subset A^\circ + B \subset (A+B)^\circ, \tag{5}$$

$$\alpha \overline{A} = \overline{\alpha A}, \qquad \alpha A^\circ = (\alpha A)^\circ, \tag{6}$$

其中 $A, B \subset X$，$0 \neq \alpha \in \mathbf{K}$. 由(5)推出，开集与任一集的和是开集. 但闭集的

和未必为闭集.

现在依次考虑 TVS 中各种常见点集的性质. 在§1.2E 中从纯代数的角度讨论了凸集、平衡集等. 在 TVS 中自然应加进拓扑的考虑.

4.1.3 命题 (i) 若 $A,B\subset X$ 是凸集,则 $A+B$ 是凸集.

(ii) 凸集关于线性算子的象或原象是凸集.

(iii) 若 $A\subset X$ 是凸集,则 $\overline{A}$ 与 A° 是凸集.

(iv) 若 $A\subset X$ 是凸集, $A^\circ\neq\varnothing$, 则 $A\subset\overline{A^\circ}$.

结论(i)~(iii)亦适用于线性流形、子空间、平衡集与绝对凸集,但对于平衡集 A, 仅当 $0\in A^\circ$ 时 A° 是平衡集,而对于线性流形则有以下特殊结论:

(v) 若 $A\subset X$ 是线性流形, $A\neq X$, 则 $A^\circ=\varnothing$.

证 若 A 是凸集, $x_0\in A^\circ$, $x\in A$, 则

$$x_t\triangleq(1-t)x_0+tx\in A^\circ(0<t<1),$$

故 $x=\lim\limits_{t\uparrow 1}x_t\in\overline{A^\circ}$. 这证得(iv).

若 $A\subset X$ 是子空间, $x\in A^\circ$, 则 $0\in A^\circ-x\subset A^\circ$, 于是由 4.1.1(v)有 $X=\bigcup_{A\in\mathbf{K}}\alpha A=A$. 这证得(v).

其余结论的证明是直接的. □

4.1.4 定义 设 $A\subset X$. 若对任给 0-邻域 V, 存在 $\beta\in\mathbf{K}$, 使得 $A\subset\beta V$, 则称 A 为**有界集**,非有界的集称为**无界集**.

注意此处定义的有界性是一纯拓扑概念(有时称为**拓扑有界**),并不涉及任何度量概念. 不过,若 X 是赋范空间,则不难验证 $A\subset X$ 有界 $\Leftrightarrow$ A 范数有界,即 $\sup\limits_{x\in A}\|x\|<\infty$.

4.1.5 命题 对于 $A\subset X$, 以下条件互相等价:

(i) A 是有界集;

(ii) 存在由平衡集组成的局部子基 $\mathscr{B}$, $\forall B\in\mathscr{B}$, $\exists\beta\in\mathbf{K}$, 使 $A\subset\beta B$;

(iii) 若 $\{\alpha_n\}\subset\mathbf{K}$, $\alpha_n\to0$, $\{x_n\}\subset A$, 则 $\alpha_nx_n\to0(n\to\infty)$;

(iv) A 中任何序列有界.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii). (i)$\Rightarrow$(ii)是平凡的. 若条件(ii)满足, $B_i\in\mathscr{B}$, $\beta_i\in\mathbf{K}$, $A\subset\beta_iB_i(1\leqslant i\leqslant n)$, $B=\bigcap B_i$, 则 $A\subset(\max|\beta_i|)B$. 这表明 A 有界.

(i)$\Rightarrow$(iii). 设 A 有界. 任给平衡 0-邻域 V, 取 $\beta\in\mathbf{K}$, 使 $A\subset\beta V$, 则当 n 充分大时 $\alpha_nx_n\in\alpha_n\beta V\subset V$, 故 $\alpha_nx_n\to0$.

(iii) $\Rightarrow$(iv). 若有 $\{x_n\}\subset A$ 无界,则有平衡 0-邻域 V, $\forall k\in\mathbf{N}$, 有 $x_{n_k}\overline{\in}kV$, 因而 $k^{-1}x_{n_k}\not\to0$, 条件(iii)不能满足.

(iv)$\Rightarrow$(i). 若 A 无界,则有平衡 0-邻域 V, $\forall n\in\mathbf{N}$, $\exists x_n\in A\backslash nV$, 序列 $\{x_n\}\subset A$ 必无界. □

由 3.1.9(i)，$A \subset X$ 全有界意味着：任给平衡 0-邻域 V，有有限集 $B \subset X$，使得 $A \subset B+V$. B 显然有界，故有 $\beta > 1$，使 $B \subset \beta V$，于是

$$A \subset \beta V + V \subset \beta(V+V),$$

这表明 A 有界. 因此全有界 $\Rightarrow$ 有界.

以下命题可与 3.1.9 对照.

4.1.6 命题　(i) 若 $A \subset B \subset X$, B 有界，则 A 亦有界.

(ii) 若 $A, B \subset X$ 有界，则 $A \cup B$ 与 $A+B$ 有界.

(iii) 若 $A \subset X$ 有界，则 $\bar{A}$ 有界.

(iv) 若 $A \subset X$ 有界，$T \in L(X,Y)$，则 TA 有界.

(v) 若 X 是 LCS，$A \subset X$ 有界，则 co A 与 abco A 有界.

若将"有界"换成"全有界"，则以上结论仍然成立.

证　对于有界集的情况，证明是直接的，不予考虑.

对于全有界集的情况，(i)～(iv)已包含于 3.1.9(A, B 全有界 $\Rightarrow A+B$ 全有界是明显的). 现在考虑(v). 设 X 是 LCS，$A \subset X$ 全有界，V 是绝对凸的 0-邻域(参看下面的 4.1.10). 取有限集 $B \subset X$，使 $A \subset B+V$, $C=$ abco B 是有限维空间中的有界闭集，必全有界，故有有限集 $D \subset X$，使得 $C \subset D+V$. 于是

$$\text{abco}\, A \subset C+V \subset D+V+V,$$

这表明 abco A 全有界. □

4.1.7 命题　设 $A, B \subset X$.

(i) 若 A, B 是紧集(相对紧集)，则 $A+B$ 是紧集(相对紧集).

(ii) 若 A 是紧集，B 是闭集，则 $A+B$ 是闭集.

(iii) 若 A 是紧集，B 是闭集，$A \cap B = \varnothing$，则有 0-邻域 V，使得

$$(A+V) \cap (B+V) = \varnothing,$$

其中 V 可取于任何给定的局部基中.

(iv) 若 X 是完备 LCS，A 是紧集，则 $\overline{\text{co}\, A}$ 是紧集. 当 $\dim X < \infty$ 时 co A 是紧集.

(v) 设 X 是 LCS，$A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$ 是凸(或绝对凸)紧集，则 co$(\bigcup A_i)$ (或 abco$(\bigcup A_i)$)是紧集.

证　(i) 利用 $A+B=\varphi(A \times B)$, $\varphi(x,y)=x+y$.

(ii) 若 $z \in \overline{A+B}$，则有网 $\{x_i\} \subset A$, $\{y_i\} \subset B$，使得 $x_i + y_i \to z$. 因 A 为紧集，不妨设 $x_i \to x \in A$，因而 $y_i \to y = z-x \in B$. 于是 $z=x+y \in A+B$, $A+B$ 是闭集.

(iii) 若结论不真，则对每个 0-邻域 V，存在 $a_V \in A$, $b_V \in B$, $x_V, y_V \in V$，使得

$$a_V + x_V = b_V + y_V \in (A+V) \cap (B+V).$$

因 A 为紧集，不妨设 $a_\nu \to a \in A$，而 $x_\nu \to 0, y_\nu \to 0$，于是 $b_\nu \to a \in A \cap B$，得出矛盾.

(iv) $\mathrm{co}\, A$ 全有界(用 4.1.6)，因而 $\overline{\mathrm{co}\, A}$ 完备且全有界(依 3.1.7 与 3.1.9)，故为紧集(用 3.1.11). 若 $\dim X < \infty$，则不妨设 $X = \mathbf{R}^n$，于是每个 $x \in \mathrm{co}\, A$ 必可表为 A 中 $n+1$ 个点的凸组合. 令

$$S = \left\{ t = (t_0, t_1, \cdots, t_n) : t_i \geqslant 0, \sum_i t_i = 1 \right\},$$

$$\varphi(t, x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i.$$

则 $\varphi : S \times A^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ 是连续映射，因而 $\mathrm{co}\, A = \varphi(S \times A^{n+1})$ 是紧集.

(v) 只考虑 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 为凸紧集的情况. 为简单起见，不妨设 $n = 2$. 每个 $x \in \mathrm{co}(A_1 \cup A_2)$ 可表成

$$x = \sum\nolimits_1^n \alpha_i y_i + \sum\nolimits_1^m \beta_j z_j,$$

其中 $y_i \in A_1, z_j \in A_2, \alpha_i, \beta_j \geqslant 0, \sum \alpha_i + \sum \beta_j = 1$. 令 $\alpha = \sum \alpha_i, \beta = \sum \beta_j$，可设 $\alpha, \beta > 0$($\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$ 的情况更易处理)，则

$$x = \alpha \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha} y_i + \beta \sum_j \frac{\beta_j}{\beta} z_j \in \alpha A_1 + \beta A_2.$$

这就表明 $\mathrm{co}(A_1 \cup A_2) = \varphi(J \times A_1 \times A_2)$，此处

$$\varphi(\alpha, y, z) = \alpha y + (1 - \alpha) z,$$

$J = [0,1]$. 于是由定理 2.2.3 推出 $\mathrm{co}(A_1 \cup A_2)$ 为紧集. □

4.1.8 定义 若 $A \subset X$ 满足 $\overline{\mathrm{span}\, A} = X$，则称 A 为 X 的**基本集**.

向量空间的基与拓扑空间中的稠密子集有何作用，这是熟知的，而基本集则兼有这两者的作用. 简单说来，基本集的价值在于：对于 TVS 所希望建立的某个结论，通常可首先在某个基本集上获得(基本集往往"较小"且由特别选定的元素组成，因而较易达到目的)，然后通过一个线性扩张与极限过程，就可将所得结论推广到全空间. 适当地利用基本集的作用，是 TVS 理论中最基本的技巧之一.

关于基本集的以下结论是十分明显的.

4.1.9 命题 (i) 若 $A \subset X$ 是基本集，$A \subset B \subset X$，则 B 是基本集，特别，$\bar{A}$ 与 $\mathrm{span}\, A$ 是基本集.

(ii) 若 $A \subset X$ 是基本集，$T, S \in L(X, Y)$，$T \mid A = S \mid A$，则 $T = S$.

(iii) X 可分 $\Leftrightarrow$ X 有可数的基本集.

(iv) 若 $A \subset X$ 是基本集，则 A 有线性无关子集 B，使得 B 仍为 X 的基本集. B 线性无关意味着它的任何有限子集线性无关.

C. 局部凸空间

在 § 1.4D 中，我们已将局部凸空间（LCS）定义为有凸局部基的 TVS. 现在进一步展开 LCS 的某些基本性质，更深入的内容将在 § 4.3 与 § 4.4 中处理. 首先，关于 LCS 的局部基，可将命题 4.1.2 加强为如下命题.

4.1.10 命题　设 X 为 LCS，则其中以下集族皆为局部基：

(i) 绝对凸 0-邻域之全体；

(ii) 闭（或开）凸 0-邻域之全体；

(iii) 闭（或开）绝对凸 0-邻域之全体.

证　仅证（i），（ii）与（iii）可类似地推出. 任给凸 0-邻域 V，令 $U=\bigcap_{|\alpha|=1}\alpha V$，则 U 是凸集且 $U\subset V$. 取平衡 0-邻域 $A\subset V$，则 $A\subset U$，故 U 是 0-邻域. 若 $0<|\beta|\leqslant 1$，则

$$\beta U=\bigcap_{|\alpha|=1}|\beta|\alpha V\subset\bigcap_{|\alpha|=1}\alpha V=U,$$

其中用到 $0\in\alpha V$ 及 αV 为凸集. 故 U 是绝对凸 0-邻域. □

还可以指出，处理 LCS 中的问题仅使用形如 $A+A$ 的 0-邻域也是充分的，其中 A 是凸 0-邻域（或闭凸 0-邻域，或绝对凸 0-邻域）.

从方法上考虑，对 LCS 我们已不满足于仅使用局部基了. 在 § 1.4D 中已提到用一族半范可刻画 LCS，现在来完全解决这一问题. 首先给出一些预备概念. 给定函数 $f:X\to\mathbf{R}$，若 f 满足条件

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)\qquad(x,y\in X),\tag{7}$$

则称 f 为**次可加泛函**；若 f 满足条件

$$f(\alpha x)=|\alpha|f(x)\qquad(\alpha\in\mathbf{K},x\in X),$$

则说 f 是**齐次的**；当齐次性限于对 $\alpha\geqslant 0$ 满足时说 f 是**正齐次的**；若 f 满足条件

$$f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+f(y),\tag{8}$$

其中 $t\in(0,1)$，$x,y\in X$，则称 f 为**凸泛函**. 正齐次、次可加泛函称为**次线性泛函**；齐次、次可加泛函就是半范（见 1.4.9）. 半范必然是非负次线性泛函，而次线性泛函必为凸泛函. $\forall x,y\in X$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\begin{cases}f(x-y)\vee f(y-x), & \text{若 } f \text{ 次线性；}\\ f(x-y), & \text{若 } f \text{ 是半范.}\end{cases}\tag{9}$$

由（9）推出：次线性泛函 f 连续 $\Leftrightarrow f$ 在 $x=0$ 连续.

任给 $A\subset X$，称

$$\mu_A(x)\triangleq\inf\{\lambda>0:x\in\lambda A\}\tag{10}$$

为集 A 的 **Minkowski 泛函**. 若 $X=\bigcup_{\lambda>0}\lambda A$，则称 A 为**吸收集**. 当 A 是吸收集时 μ_A 是 X 上的非负有限函数. Minkowski 泛函是一个看来简单但很有效的

工具,被应用于多种性质上很不相同的问题. 自然,μ_A 强烈地依赖于集 A 的性质. 以下是一个基本的结论.

4.1.11 引理 设 $A\subset X$ 是凸吸收集且 $0\in A$,则 Minkowski 泛函 μ_A 是次线性泛函,它满足

$$\{\mu_A<1\}\subset A\subset\{\mu_A\leqslant 1\}. \tag{11}$$

μ_A 连续 $\Leftrightarrow A$ 是 X 的 0-邻域. 当 μ_A 连续时式(11)两端分别为 A° 与 $\bar{A}$. 若 A 是绝对凸集,则 μ_A 是半范.

证 μ_A 显然是正齐次的. 若 $\alpha,\beta>0, x\in\alpha A, y\in\beta A$,则

$$x+y\in(\alpha+\beta)\Big(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A+\frac{\beta}{\alpha+\beta}A\Big)\subset(\alpha+\beta)A,$$

这推出 $\mu_A(x+y)\leqslant\alpha+\beta$. 令 $\alpha\to\mu_A(x),\beta\to\mu_A(y)$ 得出次可加性,故 μ_A 是次线性泛函. 若 $\mu_A(x)<1$,则 $\exists\lambda\in(0,1)$,使 $x\in\lambda A$,于是

$$x\in(1-\lambda)0+\lambda A\subset A.$$

这表明 $\{\mu_A<1\}\subset A$. 显然 $A\subset\{\mu_A\leqslant 1\}$,故(11)成立.

若 μ_A 连续,则 $\{\mu_A<1\}$ 是开的 0-邻域,于是由(11)推出 A 为 0-邻域,且不难验证

$$A^\circ=\{\mu_A<1\},\qquad \bar{A}=\{\mu_A\leqslant 1\}.$$

反之,若 A 是 0-邻域,则由 $\varepsilon A\subset\{\mu_A\leqslant\varepsilon\}(\forall\varepsilon>0$,用(11))推出 μ_A 在 $x=0$ 连续,从而处处连续.

若 A 是绝对凸集,则 $\alpha x\in\lambda A\Leftrightarrow|\alpha|x\in\lambda A(\alpha,\lambda\in\mathbf{K},x\in X)$,由此易验证 μ_A 是齐次的,因而为半范. □

任给 X 上的一族半范 P,约定(对照§1.4(12))

$$\begin{cases}\mathscr{B}=\{B_{pr}:p\in P,r>0\},\\ B_{pr}=\{x\in X:p(x)<r\}.\end{cases} \tag{12}$$

显然 B_{pr} 是绝对凸集.

以下就是我们所期待的基本结果,它可与 3.1.4,3.3.12 这一类的结果相对照.

4.1.12 定理 (i) 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,P 是 X 上的一个分离点的半范族,则以 $\mathscr{B}$(依(12))为局部子基生成 X 上的一个向量拓扑 τ,(X,τ) 是 LCS,且每个 $p\in P$ 在 (X,τ) 上连续.

(ii) 若 X 是一个 LCS,P 是 X 上的连续半范之全体,则 $\mathscr{B}$(依(12))是 X 的一个局部基.

注 P 分离点意味着 $x\neq 0\Rightarrow\exists p\in P:p(x)>0$.

证 (i) 直接看出 $\mathscr{B}^*$ 满足定理 4.1.1 中条件(i),(ii),(iv),(v). 由

$$B_{pr}+B_{pr}\subset B_{p,2r}\qquad(p\in P,r>0)$$

推出 4.1.1 中条件(iii)亦满足. 因此,$\mathscr{B}^*$ 是 X 上某个向量拓扑 τ 的局部基. 因 B_{pr} 皆为凸集,故 (X,τ) 是 LCS. $\forall p \in P$, 直接看出 p 在 $x=0$ 连续,因而处处连续.

(ii) 任给 X 的绝对凸 0-邻域 A, $p \triangleq \mu_A$ 是 X 上的连续半范(用引理 4.1.11),且 $B_{p1} \subset A$ (依(11)). 这显然得出所要结论. □

定理 4.1.12(i)中的 P 称为 X 的一个**生成半范族**,当 $\mathscr{B}$(依(12))是局部基时称 P 为**基本半范族**. 鉴于已有定理 4.1.12,今后涉及某个 LCS 时,不妨总假定已给出它的某个生成半范族 $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$,必要时可假定它是基本半范族. 生成半范族 $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ 成为基本半范族的一个充分条件是

$$\forall i,j \in I, \exists k \in I, \text{使 } \|x\|_i \vee \|x\|_j \leqslant \|x\|_k \qquad (\forall x \in X). \tag{13}$$

若可数生成半范族 $\{\|\cdot\|_i\}$ 对 $i \in \mathbf{N}$ 单调增,则它自动地满足条件(13),因而是基本半范族. 一些典型的函数空间中自然地定义的半范族即属以上情形(参看 §4.6). 任何可数半范族 $\{\|\cdot\|_i\}$ 总可以改造为一个单调族,只要令

$$\|x\|'_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant i} \|x\|_j \qquad (x \in X, i \in \mathbf{N}), \tag{14}$$

然后以 $\{\|\cdot\|'_i\}$ 代替 $\{\|\cdot\|_i\}$. 更一般地, X 的任一生成半范族 P 可依以下方式改造成一个基本半范族:对任何 $p_1, p_2, \cdots, p_n \in P$, 令 $p = \max p_i$, 然后将所有如此定义的 p 加进 P.

利用生成半范族 $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$, X 中的 LCS 结构可得到更直观的刻画. 例如,对于网 $\{x_t\} \subset X$, $x \in X$, 有

$$x_t \to 0 \Leftrightarrow \|x_t\|_i \to 0 \qquad (\forall i \in I); \tag{15}$$

$\{x_t\}$ 是 Cauchy 网的充要条件是(对照(3))

$$\lim_{s,t} \|x_s - x_t\|_i = 0 \qquad (\forall i \in I); \tag{16}$$

$A \subset X$ 有界的充要条件是(参考 4.1.4 与 4.1.5)

$$\sup_{x \in A} \|x\|_i < \infty \qquad (\forall i \in I). \tag{17}$$

注意每个半范 $\|\cdot\|_i$ 自然地定义一个伪度量

$$d_i(x,y) = \|x-y\|_i,$$

因而 X 的生成半范族 $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ 对应一个伪度量族 $\{d_i\}$, 后者生成 X 上的一致结构(参考 3.1.4 与 3.3.12). 进一步的问题是:在什么条件下 X 是可度量化的? 下面就来解决这一问题.

D. 可度量化 TVS

若 X 有可数局部基,则其相容一致结构亦有可数基,因而可度量化(依 3.3.11),这已启示出以下定理的主要结论.

4.1.13 定理 对于 TVS X, 以下条件互相等价:

(i) X 是可度量化的；

(ii) X 有可数局部基(或子基)；

(iii) X 是可赋准范空间；

(iv) X 中的拓扑 τ 可由一个平移不变度量 d 生成.

证 直接看出(iii)⇒(iv)⇒(i)⇒(ii)(参考§1.4E)，只要证(ii)⇒(iii).

设 $\{B_n\}$ 是 X 的可数局部基，下面由 $\{B_n\}$ 决定一个准范数 $\|\cdot\|$，其构成方法与 3.3.11 中度量 d 的定义有某种类似. 可设 B_n 是平衡集且 $B_n+B_n\subset B_{n-1}(\forall n>1)$. 任给二进位小数 $r=0.r_1r_2\cdots r_n\in(0,1)$，其中 $r_i=0$ 或 1 且 $r_n=1$，定义

$$A_r=\sum_{i=1}^{n}r_iB_i,\qquad A_1=X;$$

$$\|x\|=\inf\{r: x\in A_r\}\qquad(x\in X).\tag{18}$$

显然 $|\alpha|\leqslant 1\Rightarrow\|\alpha x\|\leqslant\|x\|$，$\|x\|=0\Rightarrow x\in\bigcap B_n\Rightarrow x=0$，$\|0\|=0$. 对二进位小数的位数用归纳法可证(技术性细节可参看[18, p. 19])

$$A_r+A_s\subset A_{r+s}.$$

用此可推出 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|(x,y\in X)$. 因此 $\|\cdot\|$ 满足1.4.10中的条件(i)～(iii). 为说明 $\|\cdot\|$ 是生成 X 中原拓扑的准范数，只要说明对任何序列 $\{x_k\}\subset X$，有 $x_k\to 0\Leftrightarrow\|x_k\|\to 0$. 令

$$V_r=\{x\in X: \|x\|<r\},$$

则问题归于证

$$\{B_n\}\vdash\{V_r\}\vdash\{B_n\}.\tag{19}$$

设 $r=0.0\cdots 0r_k\cdots r_i\cdots r_n, r_k=r_n=1, 1\leqslant k\leqslant n$，当 $i\neq k,n$ 时 $r_i=0$ 或 1，则由 V_r, A_r 的定义及对 $\{B_n\}$ 的设定可验证：

$$B_n\subset V_r\subset B_{k-1}.$$

由此推出(19)，因而定理得证. □

若 X 是 LCS，则由定理 4.1.13 直接推出：X 是可度量化的 ⇔ X 中的拓扑由一可数半范族 $\{\|\cdot\|_i: i\in\mathbf{N}\}$ 生成. 在这种情况下，与 X 中拓扑相容的准范数可取为

$$\|x\|=\sum_i 2^{-i}(\|x\|_i\wedge 1)\qquad(x\in X).\tag{20}$$

注意依准范数(20)空间 X 竟然是有界的！由此可见，X 中的拓扑有界与“准范数有界”并不一致，尽管度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 生成 X 中的一致结构与拓扑.

用准范数刻画可度量化 TVS 中的拓扑，固然有其简洁的好处，但亦有一些明显的缺陷. 准范数的主要缺陷是其缺少齐次性，这一缺陷有时可从以下命

题得到某种弥补.

4.1.14 命题　设 $(X, \| \cdot \|)$ 是赋准范空间,则

$$\| nx \| \leqslant n \| x \| \qquad (n \in \mathbf{N}, x \in X). \tag{21}$$

当 $x_n \to 0$ 时存在 $\alpha_n \to \infty$,使 $\alpha_n x_n \to 0 (n \to \infty)$.

证　不等式(21)从三角不等式推出. 若 $x_n \to 0$,则有 $n_1 < n_2 < \cdots$,使得 $\| x_n \| < k^{-2} (\forall n \geqslant n_k, k \in \mathbf{N})$. 当 $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ 时令 $\alpha_n = k (k \in \mathbf{N})$,则

$$\| \alpha_n x_n \| \leqslant k \| x_n \| < k^{-1} \qquad (n_k \leqslant n < n_{k+1}),$$

这推出 $\alpha_n x_n \to 0 (n \to \infty)$. □

准范数缺少齐次性还使得依准范数的球 $B_r = \{x : \| x \| < r\}$ 不必是凸集,亦不一定(依 4.1.4)有界. 这些都是极不方便的. 只有赋范空间才可以避免这些缺陷.

E. 具特殊 0-邻域的 TVS

如我们已看到的,是否具有良好性质的 0-邻域,对于 TVS 的研究关系极大. 就一般 TVS 而言,除了假定所用 0-邻域是闭的或是平衡集之外,无法提出进一步的要求. 对于 LCS,可以使用绝对凸的 0-邻域. 至于有界或紧 0-邻域的出现,则是极不寻常的事. 现在就来考虑这类特殊的空间.

首先考虑所谓**局部有界空间**,即有有界 0-邻域的 TVS. 若 U 是 X 的一个有界 0-邻域, $0 \neq \alpha_n \in \mathbf{K}, \alpha_n \to 0$,则对任何平衡 0-邻域 $V \subset X$,当 n 充分大时有 $\alpha_n U \subset V$. 这表明 $\{\alpha_n U\}$ 是 X 的局部基. 因此,局部有界空间是可度量化的,因而是可赋准范空间(依 4.1.13). 下面进而指明,局部有界空间可用某种拟范数来描述.

4.1.15 定理　设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,在 X 上定义了一个如下的**拟范数** $\| \cdot \| : X \to \mathbf{R}_+$,它满足以下条件:

(i) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$;

(ii) $\| x + y \| \leqslant k (\| x \| + \| y \|)$,$k$ 是正常数;

(iii) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (以上 $x, y \in X, \alpha \in \mathbf{K}$),

则以 $\{B_r = \{x \in X : \| x \| < r\} : r > 0\}$ 为局部基生成 X 上一向量拓扑 τ,称为由拟范 $\| \cdot \|$ 生成的拓扑,使得 (X, τ) 为局部有界空间. 反之,若 X 是局部有界空间,则其拓扑必可由某个拟范生成.

证　不难直接验证 $\{B_r : r > 0\}$ 满足定理 4.1.1 中条件(i)～(v),因而是某个向量拓扑 τ 的局部基. 由 $B_1 = r^{-1} B_r (r > 0)$ 知 B_1 关于 τ 有界,因而 (X, τ) 是局部有界 TVS.

反之,设 X 是任一局部有界空间,取 X 的一个有界平衡 0-邻域 U,以 $\| \cdot \|$ 记 U 的 Minkowski 泛函,今证 $\| \cdot \|$ 是拟范且生成 X 上的拓扑. $\| \cdot \|$

显然满足条件(i). 若 $\|x\|=0$，则有 $\lambda_n \downarrow 0$，使得 $x\in\lambda_n U$，即有 $x_n\in U$，使得 $x=\lambda_n x_n \to 0$ (用 4.1.5(iii))，故 $x=0$. 这表明 $\|\cdot\|$ 满足拟范的条件(iii). 因 $U+U$ 有界，故有 $k>0$，使得 $U+U\subset kU$. $\forall x,y\in X$，有

$$\begin{aligned}\|x\|+\|y\| &= \inf\{\lambda+\mu:\lambda,\mu>0,x\in\lambda U,y\in\mu U\}\\ &\geqslant \inf\{\lambda+\mu:\lambda,\mu>0,x+y\in\lambda U+\mu U\}\\ &\geqslant \inf\{\lambda+\mu>0:x+y\in k(\lambda+\mu)U\}\\ &= k^{-1}\|x+y\|,\end{aligned}$$

这证得 $\|\cdot\|$ 是一个拟范. 利用 $\{n^{-1}U\}$ 是 X 的局部基这一事实，易见在 X 中 $x_k\to 0 \Leftrightarrow \|x_k\|\to 0(k\to\infty)$，可见 $\|\cdot\|$ 生成 X 的拓扑. □

4.1.15 中的 U 并未假定为凸集. 如果 U 是有界凸 0-邻域，就可得出更强的结论，这正是下面要考虑的.

4.1.16 定理(Kolmogoroff) 对于 TVS X，以下条件互相等价：

(i) X 是可赋范空间；

(ii) X 是局部有界的 LCS；

(iii) X 有一个有界凸的 0-邻域.

证 显然(i)⇒(ii)⇒(iii)，今证(iii)⇒(i). 设 $V\subset X$ 是一有界凸 0-邻域. 用 4.1.10 之证(不需假定 X 为 LCS)得出，V 必包含一个绝对凸 0-邻域 U，U 亦有界(用 4.1.6). 设 $\|\cdot\|=\mu_U$ 依(10)，则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的半范(依 4.1.11)，且由(11)推出

$$\{x:\|x\|<r\}\subset rU\subset\{x:\|x\|\leqslant r\}\quad(r>0).\tag{22}$$

由 4.1.15，$\{rU:r>0\}$ 是 X 的局部基. 于是由(22)推出 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数，且其范数拓扑即为 X 上的原拓扑. □

由 4.1.16 推出，若 X 是不可赋范的 LCS，则 X 中任何 0-邻域都是无界的.

如果说出现有界 0-邻域是一种很特殊的情况，那么出现紧 0-邻域就更非一般了. 这种情况原来仅出现在有限维空间中.

4.1.17 定理 对于 TVS X，以下条件互相等价：

(i) $\dim X=n<\infty$；

(ii) $X\cong \mathbf{K}^n$ (拓扑同构)，$\mathbf{K}^n$ 中用通常拓扑；

(iii) X 有一个紧 0-邻域；

(iv) X 是 LCH.

证 (i)⇒(ii). 取 X 的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则

$$T:\mathbf{K}^n\to X,\lambda=(\lambda_i)\to\sum_i\lambda_i e_i$$

显然为连续线性同构. 为证 T 为拓扑同构，只要证 TB 是 X 的 0-邻域，$B\subset\mathbf{K}^n$ 是闭单位球. 令 $S=\partial B$，则 TS 是 X 中的紧集且 $0\notin TS$，于是有平衡 0-邻域

$V \subset X$，使 $V \cap TS = \varnothing$. 这推出 $V \subset TB$（因而 TB 是 0-邻域），否则有 $x = T\lambda \in V$，$|\lambda| > 1$，但这推出

$$T(\lambda/|\lambda|) = x/|\lambda| \in V \cap TS!$$

(ii)⇒(iii)⇒(iv)是平凡的.

(iv)⇒(i). 设 X 是 LCH，取 X 的紧 0-邻域 V，则有有限集 $A \subset X$，使得 $V \subset A + 2^{-1}V$. 令 $Y = \operatorname{span} A$，则 $V \subset Y + 2^{-1}V$. 归纳地推出

$$V \subset Y + 2^{-n}V \qquad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

因 $\{2^{-n}V\}$ 是 X 的局部基(依 4.1.15)，故依式(2)有

$$V \subset \bigcap_n (Y + 2^{-n}V) = \bar{Y} = Y.$$

这推出 $Y^\circ \neq \varnothing$，故必 $Y = X$ (用 4.1.3(v)). □

由 4.1.17 推出：有限维 TVS 必完备，TVS 的有限维子空间必为闭子空间. 在 TVS 理论中，这些事实是极其基本而常用的.

F. 积空间与商空间

设 $X_i (i \in I)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的一族 TVS，$X = \prod X_i$，$P_i: X \to X_i$ 是投影，则有唯一的方式将 X 定义为 $\mathbf{K}$ 上的向量空间，使投影 P_i 皆为线性算子(参考 §1.2C). X 上的积拓扑必为向量拓扑，因而 X 是一个 TVS. 若 $\mathscr{B}_i$ 是 X_i 的局部子基，则 $\mathscr{B} \triangleq \bigcup_i P_i^{-1}\mathscr{B}_i$ 为 X 的局部子基. 任给 $B \in \mathscr{B}_i$，有

$$\begin{aligned}
&\{(x,y): y - x \in P_i^{-1}B\} \\
=&\{(x,y): y_i - x_i \in B\} \\
=&(P_i \times P_i)^{-1}(\{(x_i,y_i): y_i - x_i \in B\}).
\end{aligned}$$

这与(1)及 §3.1(4)对照看出，与 X 中的向量拓扑相容的一致结构就是积一致结构. 因此，若每个 X_i 完备，则 X 亦完备(依 3.1.7). 若 $\mathscr{B}_i$ 是 X_i 的凸局部基，则上述的 $\mathscr{B}$ 是 X 的凸局部子基. 因此，当 $X_i (i \in I)$ 皆为 LCS 时，X 亦为 LCS. 若 $p_i(\cdot)$ 是 X_i 上的一个连续半范，则

$$p(x) \triangleq p_i(x_i) \qquad (x = (x_i) \in X)$$

是 X 上的连续半范，此种半范之全体生成 X 上的积拓扑. 若 $X_i (i \in \mathbf{N})$ 是可度量化的 TVS，则 X 亦为可度量化 TVS.

关于商空间的问题要复杂些，但仍有很好的结论.

4.1.18 定理　设 X 是 TVS，A 是 X 的闭子空间，X/A 是 X 模 A 的商空商(依 §1.2D)，X/A 上采用由投影 $P: X \to X/A$ 定义的商拓扑(依 1.5.7)，则有以下结论：

(i) X/A 是一个 TVS，且 P 是连续开映射.

(ii) P 将 X 的局部基映为 X/A 的局部基.

(iii) 若 X 是 LCS(或局部有界的、可赋准范的、可赋范的)，则 X/A 亦然.

(iv) 若 X 是 Fréchet 空间(或 Banach 空间)，则 X/A 亦然.

证 (i) 任给开集 $V \subset X$，因 $P^{-1}PV = V + A$ 是开集，故 PV 为开集(依 1.5.7)，因此 P 是开映射. 记 $\tilde{x} = Px$. 若 $x, y \in X, \tilde{x} \neq \tilde{y}$，则 $x - y \bar{\in} A$，于是由 4.1.7(iii)有平衡的开 0-邻域 V，使得

$$(x - y + V) \cap (A + V) = \varnothing.$$

用此不难验证 $P(x+V)$ 与 $P(y+V)$ 是分离 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的开邻域. 故商拓扑是 T_2 拓扑. $\forall x, y \in X$，设 W 是 $\tilde{x} + \tilde{y}$ 的开邻域，则 $P^{-1}W$ 是 $x + y$ 的开邻域，于是有 x 的开邻域 U 与 y 的开邻域 V，使 $U + V \subset P^{-1}W$. 这推出 $PU + PV \subset W$，PU 与 PV 分别为 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 的开邻域. 可见 X/A 中的加法连续. 同理可证 X/A 中的数乘运算连续，故 X/A 为 TVS.

由 P 为连续开映射得出(ii)(参考 1.3.16(i))，(ii)结合 4.1.3(或 4.1.6)推出(iii).

(iv) 设 X 是 Fréchet 空间，$\|\cdot\|$ 是与其拓扑相容的准范数. 定义

$$\|\tilde{x}\| = d(x, A) = \inf\{\|y\| : y \in \tilde{x}\}, \tag{23}$$

则易验证 $\|\cdot\|$ 满足 1.4.10 之条件(i)～(iii). 显然 $\|\tilde{x}\| < r \Leftrightarrow \exists y \in \tilde{x}$，使 $\|y\| < r$，这意味着

$$P(\{x : \|x\| < r\}) = \{\tilde{x} : \|\tilde{x}\| < r\} \quad (\forall r > 0),$$

故 $\|\tilde{x}\|$ 导出 X/A 上的商拓扑. 而这又推出 $\|\tilde{x}\|$ 为准范数. 其次，若 $\|\cdot\|$ 为范数，则用(23)直接验证 $\|\tilde{x}\|$ 亦为范数.

任给 X/A 中 Cauchy 列 $\{\tilde{x}_n\}$，可取出 $n_1 < n_2 < \cdots$，使得

$$\|\tilde{x}_{n_{i-1}} - \tilde{x}_{n_i}\| < 2^{-i}.$$

归纳地取出 $y_i \in \tilde{x}_{n_i}$，使得 $\|y_{i-1} - y_i\| < 2^{-i}(\forall i \in \mathbf{N})$. 显然 $\{y_i\}$ 是 X 的 **Cauchy 列**，于是 $y_i \to x \in X$，因而 $\tilde{y}_i = \tilde{x}_{n_i} \to \tilde{x}$，故 $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$，$X/A$ 是完备的. □

与定理 4.1.8(iv)不同，一般完备 LCS 的商空间未必是完备的.

4.1.19 定义 设 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 X 的子空间，$X = \bigoplus_i X_i$. 若

$$\prod X_i \to X \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to \sum_i x_i \tag{24}$$

为拓扑同构，则称 $\bigoplus_i X_i$ 为拓扑直和.

当 $X = \bigoplus X_i$ 是拓扑直和时，不仅作为向量空间 X 与 $\prod X_i$ 不必区别，作为 TVS 二者亦不必区别.

关于拓扑直和的一些常用结论如下.

4.1.20 命题 (i) 设 $X = \bigoplus_i^n X_i$，$P_i : X \to X_i$ 是投影，则 $\bigoplus X_i$ 是拓扑直和 $\Leftrightarrow P_i \in L(X, X_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(ii) 若 $X = \bigoplus X_i$ 是拓扑直和，则 X_i 是 X 的闭子空间.

(iii) 若 $X = A \bigoplus B$ 是拓扑直和，则 $X/A \simeq B$（拓扑同构）.

(iv) 若 $X = A \bigoplus B$，A 是 X 的闭子空间，$\dim B < \infty$，则 $A \bigoplus B$ 是拓扑直和.

证　(i) 若 $\bigoplus X_i$ 是拓扑直和，则 P_i 显然连续（且为开映射）. 反之，若 P_i 皆连续，以 T 记同构(24)，则 $T^{-1} = (P_i)$ 连续（依 1.5.6(iii)），而 T 显然连续，故 T 为拓扑同构.

(ii) 这是因为 X_i 是 $\prod X_i$ 的闭子空间。

(iii) 设 $P: A \bigoplus B \to A$，$Q: A \bigoplus B \to B$ 与 $\pi: X \to X/A$ 是投影，则

$$T: X/A \to B, \pi x \to Qx$$

是同胚（依 1.5.8），且为线性同构（依 1.2.5），因此是拓扑同构.

(iv) 设 T, π, P, Q 的意义如(iii) 之证. 因 T 是线性同构且 $\dim B < \infty$，故 T 连续，从而 $Q = T \circ \pi$ 与 $P = I - Q$ 连续，于是由已证的(i)知 $A \bigoplus B$ 是拓扑直和. □

4.1.21 定义　设 A 是 X 的闭子空间. 若存在 X 的闭子空间 B，使得 $X = A \bigoplus B$，则称 A 为 X 的**可余子空间**. 当 $\dim B < \infty$ 时称 $\dim B$ 为 A 的**余维数**，记作 $\operatorname{codim} A$.

若 $\dim X < \infty$，则由线性代数易知，X 的任何子空间是可余的. 若 X 是 Hilbert 空间，则由正交分解定理(5.8.5)推出，X 的任何闭子空间是可余的. 在其他情况下，判定 X 的一个闭子空间是否可余是一个有意义但未必容易的问题. 下面给出一个简单结果.

4.1.22 命题　设 A 是 X 的闭子空间，$n \triangleq \dim(X/A) < \infty$，则 A 是可余的且有余维数 n.

证　设 $P: X \to X/A$ 是投影. 取 $\{x_i\} \subset X$，使得 $\{Px_i\}$ 是 X/A 的基. 令 $B = \operatorname{span}\{x_i\}$，$\forall x \in X$，设 $Px = \sum \alpha_i Px_i$，则

$$x - \sum \alpha_i x_i \in N(P) = A,$$

因此

$$x = (x - \sum_i \alpha_i x_i) + \sum_i \alpha_i x_i \in A + B.$$

若 $y \triangleq \sum \alpha_i x_i \in A \cap B$，则 $Py = \sum \alpha_i Px_i = 0$，因而 $\alpha_i \equiv 0$. 这就证得 $X = A \bigoplus B$. $\{x_i\}$ 必线性无关，故 $\operatorname{codim} A = \dim B = n$. □

§4.2　线 性 算 子

线性算子作为 TVS 理论的主要研究对象，其重要性是不言而喻的. 不过，

本书的主要兴趣在于空间结构，并不打算涉及线性算子理论的深入论题. 本节的目的是介绍关于线性算子的几个基本定理，这些结果对于空间结构的研究也是不可缺少的.

A. 连续线性算子

设 X,Y 是 $\mathbf{K}$ 上的 TVS. 若线性算子 $T:X\to Y$ 将有界集映为有界集，则称 T 为**有界线性算子**，或简称为有界算子. 这一概念与连续线性算子有密切联系.

4.2.1 命题 设 $T:X\to Y$ 是线性算子，当 T 连续时必为有界算子. 若 X 是可度量化的，则其逆亦真，因此 $L(X,Y)$ 就是从 X 到 Y 的有界线性算子之全体；若 $\dim X<\infty$，则 T 必连续.

证 命题4.1.6(iv)实际上已指明了 $T\in L(X,Y)$ 是有界算子. 其次设 X 是可度量化的. 若 T 是有界算子但不连续，则有序列 $\{x_n\}\subset X$，使得 $x_n\to 0$，而 $Tx_n\not\to 0$. 不妨设有 Y 的平衡 0-邻域 V，使得 $Tx_n\,\overline{\in}\, V(\forall n\in\mathbf{N})$. 取 $\alpha_n\to\infty$，使 $\alpha_n x_n\to 0$ (依 4.1.14). 因 $\{T(\alpha_n x_n)\}$ 有界，故有 $\beta\in\mathbf{K}$ 使 $\alpha_n Tx_n\in\beta V$，因而当 n 充分大时有 $Tx_n\in(\beta/\alpha_n)V\subset V$，得出矛盾. 其余结论是明显的. □

若 X 与 Y 是 LCS，则一线性算子 $T:X\to Y$ 的连续性可通过半范族来刻画. 设 $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ 与 $\{\|\cdot\|_\beta\}$ 分别为 X 的基本半范族与 Y 的生成半范族，则利用 1.3.13(ii)不难推出，T 连续的充要条件是

$$\forall\beta,\exists\alpha,\exists k>0,\forall x\in X:\|Tx\|_\beta\leqslant k\|x\|_\alpha. \tag{1}$$

特别，一线性泛函 $f:X\to\mathbf{K}$ 连续的充要条件是

$$\exists\alpha,\exists k>0,\forall x\in X:|f(x)|\leqslant k\|x\|_\alpha. \tag{2}$$

若 X,Y 是赋范空间，则线性算子 $T:X\to Y$ 连续的充要条件是

$$\|T\|\triangleq\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|<\infty, \tag{3}$$

称 $\|T\|$ 为 $T\in L(X,Y)$ 的**算子范数**，它可等价地表为

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{x\neq 0}\|Tx\|/\|x\|\\&=\min\{k\geqslant 0:\|Tx\|\leqslant k\|x\|\,(\forall x\in X)\},\end{aligned} \tag{3$'$}$$

且
$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\qquad(\forall x\in X). \tag{4}$$

$L(X,Y)$ 依算子范数是一个赋范空间，当 Y 完备时 $L(X,Y)$ 是 Banach 空间.

为了在 X 上定义所需要的连续线性算子，通常是首先在 X 的某个稠子集或基本集上定义算子 T，然后将它线性并连续地扩张到全空间上去. 下面的扩张定理就是为此目的而设.

4.2.2 定理 (i) 设 X 与 Y 是可度量化 TVS, Y 序列完备, D 是 X 的稠密子空间, $T\in L(D,Y)$，则 T 有唯一的扩张 $\overline{T}\in L(X,Y)$.

(ii) 设 X 与 Y 是赋范空间，Y 完备，A 是 X 的基本集，算子 $T:A\to Y$ 满足条件：存在常数 $\beta>0$，使得对任给有限集 $\{\alpha_i\}\subset\mathbf{K}$ 与 $\{x_i\}\subset A$ 有

$$\left\|\sum_i\alpha_iTx_i\right\|\leqslant\beta\left\|\sum_i\alpha_ix_i\right\|,\tag{5}$$

则存在 T 的扩张 $\bar{T}\in L(X,Y)$，使得 $\|\bar{T}\|\leqslant\beta$.

证　(i) $\forall x\in X$，取 $\{x_n\}\subset D$，使 $x_n\to x$，则 $\{Tx_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，于是 $Tx_n\to y\in Y$. 若另有 $\{x'_n\}\subset D,x'_n\to x$，则对 $\{z_n\}=\{x_1,x'_1,x_2,x'_2,\cdots\}$ 有 $z_n\to x$，因而

$$\lim_n Tx_n=\lim_n Tz_n=\lim_n Tx'_n.$$

可见 y 与 $\{x_n\}$ 的选择无关，仅决定于 x，将其记作 $\bar{T}x$. 这就得到算子 $\bar{T}:X\to Y$，由其构成直接看出 $\bar{T}$ 是线性的，且是 T 的扩张. 分别取 X 与 Y 的可数局部基 $\{U_n\}$ 与 $\{V_n\}$，可设二者皆为平衡集的降列. 设 $\{x_n\}\subset X,x_n\to 0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，取 $y_n\in D$，使得

$$y_n-x_n\in U_n,\qquad Ty_n-\bar{T}x_n\in V_n,$$

则由 $x_n\to 0$ 推出 $y_n\to 0$，从而 $Ty_n\to 0,\bar{T}x_n\to 0$. 这表明 $\bar{T}$ 连续.

(ii) 令 $D=\operatorname{span}A$. 任给有限集 $\{\alpha_i\}\subset\mathbf{K},\{x_i\}\subset A$，令 $x=\sum\alpha_ix_i$，定义

$$Tx=\sum_i\alpha_iTx_i.$$

若 $x=\sum\alpha_ix_i=\sum\alpha'_ix_i$，则由条件(5)有

$$\left\|\sum_i(\alpha_i-\alpha'_i)Tx_i\right\|\leqslant\beta\left\|\sum_i(\alpha_i-\alpha'_i)x_i\right\|=0,$$

可见 Tx 的定义与表达式 $x=\sum\alpha_ix_i$ 的选择无关. 由(5)也看出 $T\in L(D,Y)$ 且 $\|T\|\leqslant\beta$. 由已证的(i)，T 可扩张为 $\bar{T}\in L(X,Y)$. $\forall x\in X$，取 $\{x_n\}\subset D$，使 $x_n\to x$，则

$$\|\bar{T}x\|=\lim_n\|Tx_n\|\leqslant\lim_n\beta\|x_n\|=\beta\|x\|,$$

这表明 $\|\bar{T}\|\leqslant\beta$. 于是 $\bar{T}$ 是定理所要求的扩张. □

B. 开映射定理

下面的几个定理都要用到第二纲性，因而大都要用到某种完备性条件.

4.2.3 开映射定理　设 X 是 Fréchet 空间，Y 是 TVS，$T\in L(X,Y)$，$R(T)$ 是第二纲集，则 T 是开映射，$R(T)=Y$，且 Y 亦为 Fréchet 空间.

证　不妨设 X 中已赋准范 $\|\cdot\|$，令 $B_r=\{x\in X:\|x\|<r\}$. 为证 T 为开映射，只要证 $\forall r>0,TB_r$ 是 Y 的 0-邻域(参看 1.3.14(iv)). 因 $R(T)$ 是第二纲集，且

$$R(T) = T\left(\bigcup_n nB_r\right) = \bigcup_n nTB_r,$$

故 TB_r 必非疏集. 因此有 Y 的平衡 0-邻域 V_r 与 $b \in Y$，使得 $b+V_r \subset \overline{TB_r}$，于是

$$V_r \subset \overline{TB_r} - \overline{TB_r} \subset \overline{TB_{2r}}. \tag{6}$$

只要证 $\overline{TB_{r/2}} \subset TB_r$ (这结合(6)将有 $V_{r/4} \subset TB_r$，因而 TB_r 是 Y 的 0-邻域). 取定 $y \in \overline{TB_{r/2}}$，必有 $x_1 \in B_{r/2}$，使 $Tx_1 \in y + V_{r/8}$，于是

$$y - Tx_1 \in V_{r/8} \subset \overline{TB_{r/4}} \quad (\text{用}(6)).$$

重复以上论证，得出序列 $\{x_n\}$，使得

$$x_n \in B_{r/2^n}, \qquad y - \sum_{i=1}^{n} Tx_n \in \overline{TB_{r/2^{n+1}}}. \tag{7}$$

由(7)推出 $x \triangleq \sum_1^\infty x_n \in B_r$. 因当 $n \to \infty$ 时 $\overline{TB_{r/2^{n+1}}}$ 最终包含于 Y 的任何闭 0-邻域，故由(7)得出 $y - \sum_1^n x_i \to 0(n \to \infty)$，因而 $y = Tx \in TB_r$. 故得 $\overline{TB_{r/2}} \subset TB_r$，$T$ 为开映射得证.

由 $R(T)$ 是 Y 的开子空间得 $R(T) = Y$ (用 4.1.3)，故 T 为满射. 结合 1.2.5与 1.5.8 得出 $Y \cong X/N(T)$ (拓扑同构)，然后用 4.1.18 推出 Y 为 Fréchet 空间. □

开映射定理是一个异常深刻的结果，它有许多极有价值的应用. 首先，几乎直接从开映射定理推出以下更便于应用的结论：

4.2.4 推论 设 X 与 Y 是 Fréchet 空间，$T \in L(X,Y)$.

(i)(狭义开映射定理) 若 T 是满射，则 T 是开映射，$T: X \to R(T)$ 是开映射 $\Leftrightarrow R(T)$ 是闭的.

(ii)(逆算子定理) 若 T 是双射，则逆算子 T^{-1} 必连续，从而 T 为拓扑同构.

(iii) 若 X 上的拓扑 τ 与 τ_1 均使 X 为 Fréchet 空间且 $\tau \subset \tau_1$，则 $\tau = \tau_1$.

(iv) 若 $X = A \oplus B$ 且 A 与 B 是 X 的闭子空间，则 $A \oplus B$ 是拓扑直和.

回忆一下在 2.2.4(ii)中我们已得到：若 X 是紧拓扑空间，Y 是 T_2 空间，$F: X \to Y$ 是连续双射，则 F 必为同胚，因而 X 与 Y 同为紧 T_2 空间. 这与逆算子定理对照表明，4.2.4 中空间的完备性所起的作用类似于紧性在 2.2.4(ii) 中所起的作用：T(或 F)单方连续与 X 完备(或紧)相结合，蕴涵了逆映射的连续性.

4.2.5. 闭图像定理 设 X 与 Y 是 Fréchet 空间，$T: X \to Y$ 是一线性算子，它有闭的图像 $G = \{(x, Tx): x \in X\}$，则 T 连续.

证 积空间 $Z = X \times Y$ 是可度量化的完备 TVS，因而是 Fréchet 空间，其

闭子空间 G 亦为 Fréchet 空间. 因投影

$$P: G \to X, (x, Tx) \to x,$$

显然为连续线性同构, 故 P^{-1} 连续(用 4.2.4(ii)). 以 Q 记投影 $X \times Y \to Y$, 则 $T = QP^{-1}$, 故 T 连续. □

C. 一致有界原理

设 $F \subset L(X,Y)$. 经常需要回答的问题是: $T \in F$ 是否"一致地"连续或有界? 这涉及到集

$$F(A) = \bigcup \{TA : T \in F\} \tag{8}$$

的性质, 此处 A 取 X 中的一定子集.

4.2.6 定义 设 $F \subset L(X,Y)$. 若 $A \subset X$, $F(A)$ 在 Y 中有界, 则说 F 在 A 上一致有界; 若 F 在每个有界集 $A \subset X$ 上一致有界, 则说 F **一致有界**. 若对任给 0-邻域 $V \subset Y$, 有 0-邻域 $U \subset X$, 使得 $F(U) \subset V$, 则说 F **等度连续**.

关于以上概念的一些简单结论如下:

4.2.7 命题 对 $F \subset L(X,Y)$ 给出以下条件:

(i) F 在 X 的某个 0-邻域上一致有界;

(ii) F 等度连续;

(iii) F 一致有界,

则(i)⇒(ii)⇒(iii). 当 Y 是局部有界空间时(i)⇔(ii), 当 X 可度量化且 Y 是局部有界时(i)⇔(ii)⇔(iii), 当 X 与 Y 皆为赋范空间时

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \sup_{T \in F} \| T \| < \infty.$$

特别, 对于 $F \subset X^* = L(X, \mathbf{K})$ 有(i)⇔(ii)⇒(iii), 当 X 可度量化时(i)⇔(ii)⇔(iii), 当 X 是赋范空间时

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \sup_{f \in F} \| f \| < \infty.$$

证 (i)⇒(ii)⇒(iii)是平凡的.

若 Y 有有界 0-邻域 V, F 等度连续, 取 0-邻域 $U \subset X$, 使 $F(U) \subset V$, 则 F 在 U 上一致有界.

其次设 X 可度量化, Y 局部有界, F 一致有界, 今证 F 在某个 0-邻域上一致有界. 取 X 的局部基 $\{U_n\}$, 可设其为降列. 取 Y 的平衡且有界的 0-邻域 V, 必有某个 $F(U_n)$ 有界, 否则, $\forall n \in \mathbf{N}$, 有 $F(U_n) \not\subset nV$, 这推出存在 $x_n \in U_n$, 使 $F(x_n) \not\subset nV$ ($\forall n \in \mathbf{N}$). 另一方面, 因显然 $x_n \to 0$, 故 $A = \{x_n\}$ 是有界集, 因而 $F(A)$ 有界, 于是有 $\beta \in \mathbf{K}$ 使 $F(A) \subset \beta V$. 这推出当 n 充分大时 $F(x_n) \subset \beta V \subset nV$, 得出矛盾.

余下的结论是明显的. □

4.2.7 只是指明了条件(i)～(iii)之间的相互关系,但这些条件中任何一条一般都是难以验证的,而验证

$$F(x)=\{Tx:T\in F\} \tag{9}$$

有界,则通常要容易些.所谓一致有界定理,就是在一定条件下从 $F(x)$ 有界推出 F 一致有界.现在就给出一个这样的结果.

4.2.8 一致有界原理 设 $F\subset L(X,Y)$,$D\subset X$,$\forall x\in D$,$F(x)$(记号依(9))有界.

(i) 若 D 是第二纲集,则 F 等度连续,从而一致有界.

(ii) 若 D 为紧凸集,则 F 在 D 上一致有界.

证 取 Y 的闭平衡 0-邻域 V,令 $A=\bigcap\{T^{-1}V:T\in F\}$,则 $A\subset X$ 是闭集,$D\subset\bigcup_1^\infty nA$.

(i) 若 D 是第二纲集,则必有 $x\in A^\circ$,于是 $U\triangleq A-x$ 是 0-邻域. $\forall T\in F$,有

$$TU=TA-Tx\subset V+V,$$

因而 $F(U)\subset V+V$. 这表明 F 等度连续.

(ii) 若 D 为紧凸集,则它作为 X 的拓扑子空间是 Baire 空间(依定理 3.2.6).因 $D=\bigcup_1^\infty(D\cap nA)$,故有某个 $D\cap nA$ 在 D 中有内点.取平衡 0-邻域 $U\subset X$,$x\in D$,使 $D\cap(x+U)\subset nA$. 因 D 有界,故有 $\beta>1$,使 $D-x\subset\beta U$. 于是

$$\begin{aligned}D&=\beta[(1-\beta^{-1})x+\beta^{-1}D]-(\beta-1)x\\&\subset\beta[D\cap(x+U)]-(\beta-1)nA\qquad(\text{用 }D\text{ 凸})\\&\subset\beta nA-(\beta-1)nA;\end{aligned}$$

$$F(D)\subset\beta nV-(\beta-1)nV\subset\beta n(V+V),$$

这表明 $F(D)$ 有界,如所要证. □

一致有界原理经常在如下较特殊的形式下使用.

4.2.9 推论 设 $F\subset L(X,Y)$. 若 X 是 Fréchet 空间,$\forall x\in X$,$F(x)$ 有界,则 F 等度连续. 若 X 是 Banach 空间,Y 是赋范空间,$\sup\limits_{T\in F}\|T\|=\infty$,则 $\left\{x:\sup\limits_{T\in F}\|Tx\|=\infty\right\}$ 是 X 中的剩余集,因而是第二纲集与稠集.

一致有界原理首先用于算子序列的收敛性问题.

4.2.10 定理 设 $\{T_n\}\subset L(X,Y)$,

$$A=\left\{x\in X:Tx=\lim_n T_nx\text{ 存在}\right\}.$$

(i) 若 $A=X$,X 是 Fréchet 空间,则 $T\in L(X,Y)$.

(ii) 若 A 是第二纲集,Y 是完备 TVS,则 $T\in L(X,Y)$.

(iii) 若 X,Y 是 Banach 空间，$\sup\limits_n \| T_n \| < \infty$，$A$ 是 X 的基本集，则 $T \in L(X,Y)$，且

$$\| T \| \leqslant \varliminf_n \| T_n \| . \tag{10}$$

证 (i) 由 4.2.9，$\{T_n\}$ 等度连续. 任给闭 0-邻域 $V \subset Y$，有 0-邻域 U，使得 $T_n U \subset V (\forall n \in \mathbf{N})$. 令 $n \to \infty$ 得 $TU \subset V$，故 $T \in L(X,Y)$.

(ii) 由 4.2.8，$\{T_n\}$ 等度连续，A 必为 X 的子空间，这又推出 $\bar{A} = X$（否则 A 是疏集!）. $\forall x \in X$，任给 X 的平衡 0-邻域 W，取 $a \in A \cap (x+W)$. 由

$$T_m x - T_n x = T_m(x-a) + (T_m - T_n)a + T_n(a-x)$$

看出 $\{T_n x\}$ 为 Cauchy 列，故 $x \in A$. 因此 $A = X$，于是如(i)一样有 $T \in L(X,Y)$.

(iii) A 必为子空间，因而 $\bar{A} = X$，于是如同(ii)一样有 $T \in L(X,Y)$. 由

$$\| Tx \| = \lim_n \| T_n x \| \leqslant \varliminf_n \| T_n \| \, \| x \|$$

得出不等式(10). □

§4.3　对 偶 空 间

设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的 TVS，$X^* = L(X,\mathbf{K})$ 是其对偶空间. 对偶空间这一名称已经暗示：X^* 与 X 有某种对等性，因而在对它们进行研究时可以互相参照. 实际上，只有对 X 作较强的限制以后，X^* 才能发挥所期望的上述作用. 不过，现在就可对 X^* 提出以下问题：

(i) X^* 是否含有足够多的元? 特别，X^* 是否大到足以分离 X 中的点或特定的点集(对照 §2.1B)?

(ii) 能否或如何将 X^* 定义为 TVS?

(iii) 在对 X^* 中拓扑的适当定义下，X 与 X^* 的性质是否有一定的对应关系?

这些问题在本节与下节中将得到适当解答. 鉴于只有在适当的凸性假设下才能获得令人满意的解答，在与对偶空间有关的问题中，空间的局部凸性常常是重要的.

本节的主要论题是 Hahn-Banach 定理及其各种形式的推论. 首先让我们建立一些预备性结果.

A. 连续线性泛函

向量空间上的线性泛函及其几何形式，已在定理 1.2.7 中作了充分的刻画. 如果加上连续性条件，那么可将 1.2.7 中的结论进一步加强.

4.3.1 命题 对于 X 上的线性泛函 f，以下条件互相等价：

(i) $f \in X^*$；

(ii) $N(f) = f^{-1}(0)$ 是 X 的闭子空间；

(iii) $\overline{N(f)} \neq X$，除非 $f = 0$；

(iv) f 在某个 0-邻域 $V \subset X$ 上有界；

(v) 存在 X 上的连续半范 $\|\cdot\|$，使得

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \qquad (\forall x \in X).$$

证 显然(iv)⇒(i)⇒(ii)⇒(iii)(参考 1.2.7).

(iii)⇒(iv). 若(iv)不成立，则对任给 0-邻域 $V \subset X$，存在 $x_V \in V$，使 $|f(x_V)| > 1$. 这就得到网 $\{x_V\}$, $x_V \to 0$. $\forall x \in X$，令

$$y_V = x - [f(x)/f(x_V)]x_V,$$

则显然 $y_V \in N(f)$, $y_V \to x$. 这表明(iii)不能成立.

(i)⇒(v). 取 $\|x\| = |f(x)|$ 即可.

(v)⇒(iv). 若 $\|\cdot\|$ 如条件(v)，则 $B = \{x \in X: \|x\| < 1\}$ 是 X 的 0-邻域，f 显然在 B 上有界. □

若 X 是赋范空间，则一线性泛函 $f: X \to \mathbf{K}$ 连续的充要条件是

$$|f(x)| \leqslant \text{const}\,\|x\| \qquad (\forall x \in X).$$

当 $f \in X^*$ 时依 §4.2(3)(4)有

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|$$

$$= \min\{k \geqslant 0: |f(x)| \leqslant k\|x\| \ (\forall x \in X)\}; \qquad (1)$$

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \qquad (\forall x \in X). \qquad (2)$$

X^* 依范数(1)是一个 Banach 空间.

4.3.2 命题 设 $0 \neq f \in X^*$，则以下结论成立：

(i) f 是开映射且 $f(X) = \mathbf{K}$；

(ii) 设 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $A \subset X$. 若 A 是(开)凸集，则 $f(A)$ 是(开)区间；若 A 是子空间，则 $f(A) = \mathbf{R}$ 或 $\{0\}$.

证 (i) 取 $x_0 \in X$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 任给 0-邻域 V，有 $\delta > 0$，使得 $|\lambda| \leqslant \delta \Rightarrow \lambda x_0 \in V$. 于是

$$\{\lambda \in \mathbf{K}: |\lambda| \leqslant \delta |f(x_0)|\} \subset f(V),$$

这表明 f 为开映射(参考 1.3.14(iii)). 因 $f(X)$ 是 $\mathbf{K}$ 的开子空间，故必 $f(X) = \mathbf{K}$.

(ii) 是明显的. □

在处理线性泛函问题时颇需留意的一点是，空间 X 是**实**空间或**复**空间这两种情况是必须区分的. 例如，若 X 是实空间，f 是 X 上的线性泛函，$V \subset X$ 是平衡集，则在 V 上 $|f| \leqslant 1 \Leftrightarrow$ 在 V 上 $f \leqslant 1$. 但若 X 是复空间，则“$f \leqslant 1$”

这样的不等式不再有意义. 不过,"实线性泛函"与"复线性泛函"可通过以下途径互相转化:设 X 是复 TVS, f 是 X 上的线性泛函, $f=\varphi+\mathrm{i}\psi$, 则 $\varphi=\mathrm{Re}f$ 是 X 上的实线性泛函(此时将 X 当作**实**空间),且必 $\psi(x)=-\varphi(\mathrm{i}x)$, 因而

$$f(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x)\qquad(x\in X).\tag{3}$$

反之,任给 X 上的实线性泛函 φ, 依式(3)定义 f, 则易直接验证 f 在 X 上是实线性泛函且 $f(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}f(x)$, 因而 f 是复线性泛函, f 连续 $\Leftrightarrow$ φ 连续. 以上事实,今后将直接利用而不再加以解释.

B. 扩张定理

现在着手解决本节开头所提出的问题: X^* 是否具有所期望的分离性? 有关的结果构成一组互有联系的定理,通常被统称为 **Hahn-Banach 定理**,它们本质上刻画了关于线性泛函的同一事实,而表述上则划分为扩张定理与分离定理这两种不同形式. 在这一点上,你不妨从如下已知事实得到启发:在拓扑空间中,连续函数**分离**闭集,原来等价于闭集上的连续函数有连续**扩张**(见 2.1.10). 不过,就目前的问题而言,扩张定理是更基本的.

4.3.3 扩张定理　设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间, A 是 X 的子空间, f 是 A 上的线性泛函.

(i) 设 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, p 是 X 上的凸泛函①,在 A 上 $f\leqslant p$, 则 f 可扩张为 X 上的线性泛函 g, 使得在 X 上 $g\leqslant p$.

(ii) 设 p 是 X 上的半范,在 A 上 $|f|\leqslant p$, 则 f 可扩张为 X 上的线性泛函 g, 使得在 X 上 $|g|\leqslant p$.

(iii) 设 X 是 LCS, $f\in A^*$, 则 f 可扩张为 $g\in X^*$.

(iv) 设 X 是赋范空间, $f\in A^*$, 则 f 可扩张为某个 $g\in X^*$, 使得

$$\|g\|=\|f\|_A\triangleq\sup\{|f(x)|:x\in A,\|x\|\leqslant 1\}.$$

在这种情况下,称 g 为 f 的**保范扩张**.

证　(i) 这是最关键性的一步. 令

$$M=\{g:g\text{ 是 }f\text{ 的线性扩张且 }g\leqslant p\},$$

M 以 $\subset$ (表扩张关系)为序是一半序集,其全序子集显然有上界. 于是由极大原理(1.1.6) M 有极大元 g, 设其定义域为 B, 只要证明 $B=X$. 用反证法:设存在 $z\in X\backslash B$, 不妨设 $X=B\oplus\mathbf{R}z$. $\forall\alpha,\beta>0,x,y\in B$, 由 p 的凸性有

$$\begin{aligned}\alpha g(x)+\beta g(y)&=g(\alpha x+\beta y)\\&=(\alpha+\beta)g\left(\frac{\alpha(x+\alpha^{-1}z)+\beta(y-\beta^{-1}z)}{\alpha+\beta}\right)\end{aligned}$$

---

① Hahn-Banach 原来只是考虑了 p 为次线性泛函的情况,Weston 推广到 p 为凸泛函的情况.

$$\leqslant \alpha p(x+\alpha^{-1}z)+\beta p(y-\beta^{-1}z).$$

于是存在 $r\in\mathbf{R}$, 使得 $\forall\alpha,\beta>0,x,y\in B$, 有

$$\beta[g(y)-p(y-\beta^{-1}z)]\leqslant r\leqslant\alpha[p(x+\alpha^{-1}z)-g(x)]. \tag{4}$$

定义 X 上的线性泛函

$$h(x+\lambda z)=g(x)+\lambda r \qquad (x\in B,\lambda\in\mathbf{R}),$$

则 $h\mid B=g$. 今证在 X 上 $h\leqslant p$, 这相当于证 $\forall x,y\in B,\alpha,\beta>0$, 有

$$\begin{cases}g(x)+\alpha^{-1}r\leqslant p(x+\alpha^{-1}z),\\ g(y)-\beta^{-1}r\leqslant p(y-\beta^{-1}z),\end{cases}$$

而这正好与不等式(4)相当. 这就得出 $h\in M$, 但这与 g 的极大性矛盾, 故得 $B=X$, 如所要证.

(ii) 首先设 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$. 半范是凸泛函, 于是由已证的(i), f 可扩张为 X 上的线性泛函 g, 使得在 X 上 $g\leqslant p$. $\forall x\in X$, 有

$$-g(x)=g(-x)\leqslant p(-x)=p(x),$$

因此 $|g(x)|\leqslant p(x)$. 其次设 $X=\mathbf{C}$. 对 $\mathrm{Re}f$ 应用已证结论, 将 $\mathrm{Re}f$ 扩张为 X 上的实线性泛函 φ, 使得在 X 上 $|\varphi|\leqslant p$. 于是

$$g(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x) \qquad (\text{依}(3))$$

是 X 上的复线性泛函, 易验证 $g\mid A=f$. 令 $\varepsilon=\operatorname{sgn} g(x)$ ①, 则

$$|g(x)|=\varepsilon g(x)=g(\varepsilon x)=\varphi(\varepsilon x)$$
$$\leqslant p(\varepsilon x)=p(x) \qquad (x\in X).$$

(iii) 由 4.3.1(v), 存在 X 上的连续半范 p, 使得在 A 上 $|f|\leqslant p$. 由已证的(ii), f 可扩张为 X 上的线性泛函 g, 使得在 X 上 $|g|\leqslant p$; 再用 4.3.1(v) 知 $g\in X^*$.

(iv) 因 $p(x)=\|f\|_A\|x\|\ (x\in X)$ 是半范, 在 A 上 $|f|\leqslant p$, 故由(iii)之证知 f 可扩张为 $g\in X^*$, $|g|\leqslant p$, 因而 $\|g\|\leqslant\|f\|_A$. 其次显然 $\|g\|\geqslant\|f\|_A$, 故 $\|g\|=\|f\|_A$. □

C. 分离定理

现在从扩张定理推出分离定理. 在 §2.1 中我们考虑了拓扑空间中的函数分离性, 现在考虑的分离性与之类似但略有不同. 一般的提法是: 给定非空集 $A,B\subset X, A\cap B=\varnothing$, 是否有 $f\in X^*, r\in\mathbf{R}$, 使得

$$f(A)<r<f(B) \tag{5}$$

或

$$f(A)\leqslant r\leqslant f(B). \tag{6}$$

当(6)(或(5))成立时, 我们说 f 或超平面 $f^{-1}(r)$ 分离(或严格分离)集 A 与

① 约定 $\operatorname{sng}\alpha=\bar{\alpha}/|\alpha|\ (0\neq\alpha\in\mathbf{K})$, $\operatorname{sgn}0=0$.

B. 当如上的 f 与 r 存在使得(6)(或(5))成立时,说 X^* 分离(或严格分离) A 与 B. 直观上很明显,要使 A 与 B 能被超平面分离,仅 $A \cap B = \varnothing$ 是不够的, A 与 B 的凸性将起重要作用. 下面是基本的分离定理.

4.3.4 定理(Eidelheit) 设 X 是**实** TVS, $A,B \subset X$ 是非空凸集, $A^\circ \neq \varnothing$, $A^\circ \cap B = \varnothing$, 则存在 $f \in X^*$, $r \in \mathbf{R}$, 使得式(6)与下式成立:

$$f(A^\circ) < r \leqslant f(B). \tag{7}$$

证 由 $f(A^\circ) < r$ 与 $A \subset \overline{A^\circ}$ (见 4.1.3)显然推出 $f(A) \leqslant r$, 故只需证(7),因而不妨设 A 是非空开凸集. 取定 $x_0 \in B - A$, 则 $V \triangleq A - B + x_0$ 是凸开 0-邻域, $x_0 \overline{\in} V$. 于是 $p = \mu_V$ 是连续次线性泛函, $p(x_0) \geqslant 1$, $p(V) < 1$ (依 4.1.11). 定义 $\mathbf{R}x_0$ 上的线性泛函

$$f: \mathbf{R}x_0 \to \mathbf{R}, \qquad \lambda x_0 \to \lambda,$$

易验证在 $\mathbf{R}x_0$ 上 $f \leqslant p$. 由 4.3.3(i)知 f 可扩张为 X 上的线性泛函,不妨仍记为 f, 使得在 X 上 $f \leqslant p$. 由 $f \leqslant p$ 与 $p(V) < 1$ 推出在 0-邻域 $V \cap (-V)$ 上 $|f| < 1$, 故 $f \in X^*$ (用 4.3.1(iv)). 由

$$1 > f(V) = f(A) - f(B) + f(x_0)$$

与 $f(x_0) = 1$ 推出 $f(A) < f(B)$. 令 $r = \sup f(A)$. 因 $f(A)$ 是开区间(4.3.2(ii)),故式(7)必满足. □

在应用 4.3.4 时,可注意一个简单的事实:不等式(7)可反转为

$$f(A^\circ) > r \geqslant f(B),$$

必要时只需用 $-f$ 代 f 就行了. 若 X 是复 TVS,则(7)中的 f 应代以 $\mathrm{Re} f$. 对不等式(5),(6)都可作此理解,下面遇到这类情况时,将不再特别说明.

利用定理 4.3.4,可推出形式各异的多种分离性结果,一些常用的结论汇集于下.

4.3.5 推论 设 X 为 LCS, $A,B \subset X$ 是非空凸集, $A \cap B = \varnothing$.

(i) (**Ascoli 定理**) 若 A 是紧凸集, B 是闭凸集,则存在 $\varphi \in X^*$, $r \in \mathbf{R}$, $f = \mathrm{Re}\,\varphi$ 使不等式(5)成立.

(ii) 若 A 是闭绝对凸集, B 是紧凸集,则存在 $f \in X^*$, 使得

$$|f(a)| < 1 < |f(b)| \qquad (\forall a \in A, b \in B). \tag{8}$$

(iii) 若 A 是闭子空间, $x_0 \in A^c$, 则存在 $f \in X^*$, 使 $f(A) = 0$, $f(x_0) \neq 0$ (可要求 $f(x_0) = 1$).

(iv) X^* 分离点:若 $x,y \in X$, $x \neq y$, 则存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x) \neq f(y)$.

证 (i) 由 4.1.7(iii)有凸开 0-邻域 V, 使得

$$(A + V) \cap (B + V) = \varnothing,$$

$A + V$ 与 $B + V$ 皆为凸开集(4.1.3). 于是由 4.3.4 有 $\varphi \in X^*$, $r \in \mathbf{R}$, $f =$

$\mathrm{Re}\,\varphi$ 满足

$$f(A+V)<r\leqslant f(B+r).$$

注意到 $f(B+V)$ 为开区间(4.3.2(ii)),以上不等式显然推出(5).

(ii) 应用已证的(i),知有 $f\in X^*$, $r\in\mathbf{R}$, 使得

$$\mathrm{Re}f(a)<r<\mathrm{Re}f(b)\qquad(a\in A,b\in B).\tag{9}$$

由 $0\in A$ 推出 $r>0$, 故不妨设 $r=1$. 令 $\varepsilon=\mathrm{sgn}f(a)$, 由(9)得

$$\begin{aligned}|f(a)|&=f(\varepsilon a)=\mathrm{Re}f(\varepsilon a)\qquad(\varepsilon a\in A)\\&<1<\mathrm{Re}\,f(b)\leqslant|f(b)|\qquad(a\in A,b\in B).\end{aligned}$$

(iii) 以 $B=\{x_0\}$ 应用已证的(ii)得 $f\in X^*$, 使得

$$|f(a)|<1<|f(x_0)|\qquad(a\in A).$$

因 $f(A)$ 是 $\mathbf{K}$ 的子空间,故必 $f(A)=0$.

(iv) 对 $A=\{0\}$, $x_0=x-y$ 应用(iii)即得. □

4.3.5 中形式上最简单但最具本质意义的结论是(iv). 由于 X^* 分离点,赋值映射(参看 §1.5(6))

$$e:X\to\mathbf{K}^{X^*},\qquad x\to(f(x))_{f\in X^*}\tag{10}$$

是一个线性单射. 因此,至少在代数意义上,已将 X 嵌入 $\mathbf{K}^{X^*}$, $f(x)$ 起向量 x 的坐标的作用. 这一理解对于对偶空间 X^* 的运用有基本意义. 今后将在适当条件下赋予(10)以拓扑嵌入或等距嵌入的意义.

对于 4.3.5(iii)可作一点改进.

4.3.6 定理 设 A 是 X 的子空间, $\|\cdot\|$ 是 X 上的连续半范, $x_0\in X$,

$$\rho=\inf_{a\in A}\|x_0-a\|,\tag{11}$$

则存在 $f\in X^*$, 使得

$$f(A)=0,f(x_0)=\rho,\ |f(x)|\leqslant\|x\|\qquad(\forall x\in X).$$

若 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间而 $\rho>0$, 则可要求 $\|f\|=1$, $f(x_0)=d(x_0,A)$, 特别当 $A=\{0\}$ 时 $f(x_0)=\|x_0\|$.

证 在 $B=A\oplus\mathbf{K}x_0$ 上定义线性泛函

$$f(a+\lambda x_0)=\lambda\rho\quad(a\in A,\lambda\in\mathbf{K}),$$

则显然 $f(A)=0$, $f(x_0)=\rho$. 对 $x=a+\lambda x_0(a\in A,\lambda\in\mathbf{K})$ 有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|\lambda|\inf_{b\in A}\|x_0-b\|\\&=\inf_{b\in A}\|\lambda x_0+b\|\leqslant\|x\|.\end{aligned}$$

由 4.3.3(ii),不妨设 f 已线性地扩张到 X 上且 $|f(x)|\leqslant\|x\|(\forall x\in X)$, 于是 $f\in X^*$ (4.3.1(v)).

若 $\|\cdot\|$ 是范数,则由(11)有 $f(x_0)=\rho=d(x_0,A)$. 由

$$|f(x)|\leqslant\|x\|\qquad(\forall x\in X)$$

得 $\|f\| \leqslant 1$. 其次, $\forall a \in A$, 有

$$\rho = f(x_0) = f(x_0 - a) \leqslant \|f\| \|x_0 - a\|,$$

这推出 $\rho \leqslant \|f\| \rho$, 从而 $\|f\| \geqslant 1$ (注意 $\rho > 0$!),因此 $\|f\| = 1$, 如所要证. □

分离定理及其推论有各种各样的应用,几乎遍及分析数学的所有重要领域. 应用分离定理的直接目的是确定特定连续线性泛函的存在性,而所用技巧则因具体问题而异. 下面举出两个简单例子,它们本身也是很有趣的结论.

4.3.7 推论 对于 TVS X, 以下条件互相等价:

(i) $X^* \neq \{0\}$;

(ii) X 上存在非零连续半范;

(iii) X 有非空凸开的真子集.

证 (i)⇒(ii). 若 $0 \neq f \in X^*$, 则 $\|x\| = |f(x)|$ $(x \in X)$ 即为 X 上的非零连续半范.

(ii)⇒(iii). 若 $\|\cdot\|$ 是 X 上的非零连续半范,则 $\{x \in X: \|x\| < 1\}$ 即为非空凸开真子集.

(iii)⇒(i). 设 $A \subset X$ 是非空凸开集, $x_0 \in A^c$, 则对 A 与 $B = \{x_0\}$ 应用 4.3.4 得出有 $0 \neq f \in X^*$ 存在. □

4.3.8 定义 若 $\{x_i : i \in I\} \subset X$ 与 $\{f_i : i \in I\} \subset X^*$ 满足

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j \in I),$$

则称 $\{x_i\}$ 与 $\{f_i\}$ 是**双正交集**,或说 $\{f_i\}$ 是 $\{x_i\}$ 的双正交集(或双正交列,若 $I = \mathbf{N}$).

4.3.9 推论 设 X 是 LCS, $\{x_i : i \in I\} \subset X$, 则 $\{x_i\}$ 有双正交集的充要条件是

$$x_i \overline{\in} \overline{\operatorname{span}}\{x_j : j \neq i\} \quad (\forall i \in I), \tag{12}$$

特别,有限集 $\{x_i\}$ 有双正交集的充要条件是它线性无关.

证 令 $A_i = \overline{\operatorname{span}}\{x_j : j \neq i\}$. 若 $\{x_i\}$ 有双正交集 $\{f_i\}$, 则由 $f_i(x_i) = 1$, $f_i(A_i) = 0$ 推出 $x_i \overline{\in} A_i (\forall i \in I)$. 反之,若条件(12)满足,则由 4.3.5(iii)有 $f_i \in X^*$, 使得 $f_i(A_i) = 0, f_i(x_i) \neq 0$, 不妨设 $f_i(x_i) = 1 (\forall i \in I)$, $\{f_i\}$ 就是 $\{x_i\}$ 的双正交集. □

4.3.10 推论 LCS 的有限维子空间是可余的.

证 设 A 是 LCS X 的有限维子空间. 取 A 的基 $\{e_i\}$, 则由 4.3.9 知 $\{e_i\}$ 有双正交集 $\{f_i\}$, 于是 $B \triangleq \bigcap N(f_i)$ 是 X 的闭子空间. $\forall x \in X$, 显然有

$$x = \sum_i f_i(x) e_i + \left(x - \sum_i f_i(x) e_i\right) \in A + B.$$

若 $y = \sum \alpha_i e_i \in A \cap B$, 则 $\alpha_i = f_i(y) = 0$, 因而 $y = 0$. 这表明 $X = A \oplus$

B，故 A 是可余的(参考 4.1.21). □

值得注意的是，不可将 4.3.10 用于一般 TVS. 例如，若 X 是一个 TVS，使得 $X^* = \{0\}$ (4.6.5 提供了这样的例子)，任取 $0 \neq x_0 \in X$，则 $A = \mathbf{K}x_0$ 就不是可余的. 否则，从 X 到 A 的连续投影提供了一个非零连续线性泛函！

§4.4 弱 拓 扑

本节中设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的 LCS. 现在来解决上节留下的问题：如何将 X^* 定义为 TVS? 解决的方案一般不只一种，采用弱拓扑或许是最简单而又不失为有用的方法. 本节处理方法的一个显著特点是，几乎所有内容的展开都是同时对 X 与 X^* "对偶地"进行的，因而充分地体现了两者的对偶关系. 但应注意到，关于 X 与 X^* 的结论未必是完全对等的.

A. 极集与零化子

首先引进两个有用的缩记号，系统地使用这些记号，可将涉及对偶空间的一些复杂关系表达得很简单，且更容易激发某些联想与类比.

任给 $A \subset X, F \subset X^*$，约定

$$\begin{cases} A^0 = \{f \in X^* : |f(x)| \leqslant 1 (\forall x \in A)\}, \\ A^{\perp} = \{f \in X^* : f(A) = \{0\}\}, \\ {}^0F^{①} = \{x \in X : |f(x)| \leqslant 1 (\forall f \in F)\}, \\ {}^{\perp}F = \{x \in X : F(x) = \{0\}\}. \end{cases} \tag{1}$$

A^0 与 ${}^0F$ 分别称为 A 与 F 的**极集**，而 $A^{\perp}$ 与 ${}^{\perp}F$ 分别称为 A 与 F 的**零化子**. 关于这些集容易推出以下简单结论：

(i) A^0 与 $A^{\perp}$ 分别为 X^* 中的绝对凸集与子空间，且

$$A^{\perp} = \bigcap_{t>0} tA^0 \subset A^0; \tag{2}$$

${}^0F$ 与 ${}^{\perp}F$ 分别为 X 中的闭绝对凸集与闭子空间，且

$${}^{\perp}F = \bigcap_{t>0} t\,{}^0F \subset {}^0F. \tag{3}$$

(ii) 取极集或零化子的运算关于集包含是"单调减"的，这意味着

$$\begin{cases} A \subset B \subset X \Rightarrow A^0 \supset B^0, A^{\perp} \supset B^{\perp}, \\ F \subset G \subset X^* \Rightarrow {}^0F \supset {}^0G, {}^{\perp}F \supset {}^{\perp}G. \end{cases} \tag{4}$$

(iii) 与绝对凸包及闭线性扩张的关系：

$$A^0 = (\overline{\text{abco}\, A})^0, \qquad A^{\perp} = (\overline{\text{span} A})^{\perp}; \tag{5}$$

---

① 将 ${}^0F$，${}^{\perp}F$ 写作 F^0，$F^{\perp}$ 或许更方便，只是有时可能产生歧义.

$$^0F = {}^0(\text{abco } F), \qquad {}^\perp F = {}^\perp(\text{span } F). \tag{6}$$

(iv) 若 A,F 是子空间,则 $A^0 = A^\perp$,${}^0F = {}^\perp F$. 例如,$A^0 \subset A^\perp$ 的证明如下:$\forall f \in A^0, x \in A, t > 0$,有 $t|f(x)| = |f(tx)| \leqslant 1$,因而 $|f(x)| \leqslant t^{-1} \to 0(t \to \infty)$,故 $f \in A^\perp$.

(v) 设 $D = \{\alpha \in \mathbf{K}: |\alpha| \leqslant 1\}$,$F(A) = \{f(x): f \in F, x \in A\}$,则

$$A \subset {}^0F \Leftrightarrow F(A) \subset D \Leftrightarrow F \subset A^0;$$

$$A \subset {}^\perp F \Leftrightarrow F(A) = \{0\} \Leftrightarrow F \subset A^\perp;$$

$$F(A) \text{ 有界} \Leftrightarrow \exists \beta > 0: A \subset \beta\, {}^0F$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta > 0: F \subset \beta A^0.$$

(vi) 设 X 是赋范空间,B 与 B^* 分别为 X 与 X^* 中的闭单位球,则 $B^0 = B^*$,${}^0(B^*) = B$.

B. 弱拓扑

简单地说,弱拓扑就是点态收敛拓扑,其准确定义如下.

4.4.1 定义　约定 $\tilde{x}(f) = f(x)$,则 X 中有唯一拓扑 τ_w,使赋值映射

$$e: X \to \mathbf{K}^{X^*}, \qquad x \to \tilde{x} \tag{7}$$

为拓扑嵌入,称 τ_w 为 X 中的**弱拓扑**或 $\sigma(X,X^*)$ 拓扑. X^* 在 $\mathbf{K}^X$ 中的相对拓扑 τ_w^* 称为 X^* 中的**弱*拓扑**或 $\sigma(X^*,X)$ 拓扑. 分别以 X_w 与 X_w^* 记空间 (X,τ_w) 与 (X^*,τ_w^*),其中的收敛分别记作 $\rightharpoonup$ 与 $\overset{*}{\rightharpoonup}$,与 τ_w 拓扑及 τ_w^* 拓扑有关的概念分别称为**弱概念**与**弱*概念**,或 $\sigma(X,X^*)$ 概念与 $\sigma(X^*,X)$ 概念. 例如,X_w 中的闭集称为弱闭集或 $\sigma(X,X^*)$ 闭集.

因 $\mathbf{K}^{X^*}$ 与 $\mathbf{K}^X$ 依积拓扑均为 LCS,故 X_w 与 X_w^* 亦为 LCS. 今给出拓扑 τ_w 与 τ_w^* 的一些等价刻画.

1°局部基　依 § 1.5(3)知 X_w 的局部基可由形如

$$V = \{x \in X: |f_i(x)| \leqslant r(1 \leqslant i \leqslant n)\}$$

的集构成,其中 $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset X^*$,$r > 0$. 注意到 $V = r\,{}^0F$,故

$$\{{}^0F: F \subset X^* \text{ 是有限集}\} \tag{8}$$

是 X_w 的一个局部基. 类似地,

$$\{A^0: A \subset X \text{ 是有限集}\} \tag{9}$$

是 X_w^* 的一个局部基. 注意 ${}^0F$ 与 A^0 均绝对凸,分别为弱闭集与弱*闭集.

2°收敛性　由弱拓扑的定义及 1.5.6(ii),知

$$\begin{cases} x_t \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow f(x_t) \to 0 & (\forall f \in X^*), \\ f_t \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \Leftrightarrow f_t(x) \to 0 & (\forall x \in X). \end{cases} \tag{10}$$

由(10)推出,X 中依原拓扑的收敛强于弱收敛,因此原拓扑强于弱拓扑.

3°半范族 任给 $A \subset X, F \subset X^*$，约定

$$\begin{cases} \| x \|_F = \sup_{f \in F} | f(x) |, \\ \| f \|_A = \sup_{x \in A} | f(x) |, \end{cases} \tag{11}$$

则 $\| \cdot \|_F$ 与 $\| \cdot \|_A$ 分别为 X 与 X^* 上的半范，

$$\| x \|_F \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in {}^{0}F$$

这与(8)对照看出

$$\{ \| \cdot \|_F : F \subset X^* \text{ 是有限集} \}$$

是 X_w 的一个基本半范族. 同理，

$$\{ \| \cdot \|_A : A \subset X \text{ 是有限集} \}$$

是 X_w^* 的一个基本半范族.

任给 X 上的线性泛函 f，有

$$f \in X^* \Leftrightarrow \text{当 } x_t \to 0 \text{ 时 } f(x_t) \to 0$$
$$\Leftrightarrow \text{当 } x_t \rightharpoonup 0 \text{ 时 } f(x_t) \to 0,$$

这表明 $(X_w)^* = X^*$. 另一方面，X_w^* 作为 LCS，有一个确定的拓扑对偶 $(X_w^*)^*$，简记作 X_w^{**}，约定在其中采用 $\sigma(X_w^{**}, X_w^*)$ 拓扑. 有趣的是，如以下定理所断言的，X_w^{**} 实际上就是 X_w.

4.4.2 定理 设 e 是由(7)表示的赋值映射，则 $e: X_w \to X_w^{**}$ 是一拓扑同构.

证 由定义 4.4.1，$e: X_w \to e(X_w)$ 是拓扑同构. 由 X_w^{**} 的定义知 $X_w^{**} \subset \mathbf{K}^{X^*}$ 是拓扑嵌入. 因此，只需证 $e(X_w) = X_w^{**}$. 直接看出 $e(X_w) \subset X_w^{**}$，问题在于证 $X_w^{**} \subset e(X_w)$. 取定 $\varphi \in X_w^{**}$，φ 必在某个 0-邻域 $A^0 \subset X_w^*$ 上有界，其中 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$. 可设 $\forall f \in A^0$，有 $| \varphi(f) | < 1$. 定义

$$\psi: (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) \to \varphi(f) \quad (f \in X^*).$$

若 $f, g \in X^*, f - g \in A^{\perp}$，则 $\forall t > 0$，有 $t(f-g) \in A^0$ (依(2))，因而 $| \varphi(f - g) | < 1/t \to 0 (t \to \infty)$，即 $\varphi(f) = \varphi(g)$. 这表明 ψ 的定义与 f 的选择无关，它是 $\mathbf{K}^n$ 的某子空间上的线性泛函. 由扩张定理，不妨设 $\psi \in (\mathbf{K}^n)^*$. 于是有 $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbf{K}^n$，使得

$$\varphi(f) = \sum_i \alpha_i f(x_i) = f\Big(\sum_i \alpha_i x_i\Big) \qquad (\forall f \in X^*).$$

这表明 $\varphi = e(x_0), x_0 = \sum \alpha_i x_i$. 故得所要证. □

定理 4.4.2 的意义在于，X_w 与 X_w^* **互为对偶**. 基于这种对称性，每个关于 X_w 的定理自动地对应一个关于 X_w^* 的对偶定理，反之亦然. 不过要紧的是，以上结论的前提是：在 X_w 与 X_w^* 中分别使用弱拓扑与弱*拓扑！

若 $\dim X < \infty$，则不难说明 X 上的弱拓扑就是原拓扑. 当 $\dim X = \infty$

时，弱拓扑有某些很特殊的性质.

4.4.3 命题　设 $\dim X=\infty$，则 X_w 的每个 0-邻域包含 X 的无穷维子空间，X_w 必非局部有界空间与可赋范空间.

证　只要考虑某个 0-邻域 ${}^0F$，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}\subset X^*$. 定义

$$T:X\to\mathbf{K}^n,\qquad x\to(f_i(x)),$$

则 $T\in L(X,\mathbf{K}^n)$. 令 $N=N(T)$，则

$$\dim X=\dim N+\dim(X/N)\leqslant\dim N+n,$$

可见 $\dim N=\infty$. 而 $N={}^{\perp}F\subset{}^0F$（依(3)），故 ${}^0F$ 包含无穷维子空间.

若 X_w 局部有界，则必可赋范（依定理 4.1.16），但赋范空间中的球 0-邻域显然不包含无穷维子空间！ □

由 4.4.3 推出，若 X 是无穷维赋范空间，则 X 中的弱拓扑必严格地小于原拓扑. 对于一般的局部凸空间 X，X 中的弱拓扑有可能重合于原拓扑. 例如，X_w 上的弱拓扑（即 $\sigma(X_w,X_w^*)$ 拓扑）就是 τ_w，即 X_w 上的原拓扑！

C. 弱闭集

现在依次讨论一些弱概念，包括弱闭集、弱紧性与弱有界性等. 我们将特别关注它们与相应的原拓扑概念之间的关系. 其次，应注意弱拓扑无疑是 §1.3意义上的拓扑，且 X_w 与 X_w^* 都是 LCS，因而关于一般拓扑空间及 LCS 的结论均可应用.

任给 $A\subset X$ 与 $F\subset X^*$，分别以 $\overline{A_w}$ 与 $\overline{F_{w^*}}$ 记 A 的**弱闭包**与 F 的**弱*闭包**. 因弱拓扑弱于原拓扑，故弱闭集要少于原闭集，因而由公式 §1.3(9) 推出 $\overline{A}\subset\overline{A_w}$，且通常 $\overline{A}$ 要比 $\overline{A}_w$ 小得多. 因此，$\overline{A}=\overline{A}_w$ 的情况非同寻常而特别令人感兴趣.

4.4.4 Mazur 定理　若 $A\subset X$ 为凸集，则 $\overline{A}=\overline{A}_w$.

证　只要证 $\overline{A}\supset\overline{A}_w$. 若 $x\in X\backslash\overline{A}$，则对 $\{x\}$ 与闭凸集 $\overline{A}$ 应用分离定理(4.3.5(i))得出 $f\in X^*$，$r\in\mathbf{R}$，使得

$$\mathrm{Re}f(x)<r<\mathrm{Re}f(a)\qquad(\forall a\in A).$$

任给网 $\{a_t\}\subset A$，以上不等式表明不可能 $f(a_t)\to f(x)$，因而不可能 $a_t\rightharpoonup x$，故 $x\overline{\in}\overline{A}_w$，如所要证. □

Mazur 定理看似简单，但它有许多重要应用. 下面列举 4.4.4 的一些主要推论，以备引用.

4.4.5 推论　设 $A\subset X$，$F\subset X^*$，则以下结论成立：

(i) $\overline{\mathrm{co}\,A}=\overline{(\mathrm{co}\,A)}_w$，$\overline{\mathrm{span}\,A}=\overline{(\mathrm{span}\,A)}_w$，$A$ 是 X 的基本集 $\Leftrightarrow$ A 是弱基本集（即 X_w 的基本集）.

(ii) 若 X 可度量化，$\{x_n\}\subset X$，$x_n\rightharpoonup x$，则有 $\{y_n\}\subset\mathrm{co}\{x_i\}$ 使得 $y_n\to x$.

(iii) 若 A 是凸集,则 A 是闭集 $\Leftrightarrow$ A 是弱闭集.

(iv)(**双极定理**) 对 A,F 成立等式:

$$\overline{\text{abco}\,A} = {}^0(A^0), \tag{12}$$

$$\overline{(\text{abco}\,F)}_{w^*} = ({}^0F)^0. \tag{13}$$

(v)(**双零化定理**) 对 A,F 成立等式:

$$\overline{\text{span}\,A} = {}^\perp(A^\perp), \tag{14}$$

$$\overline{(\text{span}\,F)}_{w^*} = ({}^\perp F)^\perp. \tag{15}$$

(vi) A 是 X 的基本集 $\Leftrightarrow A^\perp = \{0\}$, F 是 X^* 的弱*基本集 $\Leftrightarrow {}^\perp F = \{0\}$.

证 直接由 4.4.4 推出(i)与(iii),易见(i)$\Rightarrow$(ii),(v)$\Rightarrow$(vi). 因由(i)有 $\overline{\text{abco}\,A} = \overline{(\text{abco}A)}_w$,故(12)$\Rightarrow$(13),(14)$\Rightarrow$(15)(参看 4.4.2 之后的说明). 因此只要证(12)与(14).

证(12). 由(5)推出 $B \triangleq \overline{\text{abco}\,A} \subset {}^0(A^0)$. 若 $x \in B^c$,则由 4.3.5(ii)有 $f \in X^*$,使得

$$|f(b)| < 1 < |f(x)| \qquad (\forall b \in B),$$

这表明 $f \in A^0$,从而 $x \overline{\in} {}^0(A^0)$. 故(12)成立.

证(14). 这可如同(12)一样由 4.3.5(iii)推出,但由(12)推出更简单:

$$\overline{\text{span}\,A} = {}^0((\overline{\text{span}A})^0) = {}^0((\overline{\text{span}\,A})^\perp)$$
$$= {}^0(A^\perp) = {}^\perp(A^\perp). \qquad \square$$

利用 4.4.4 与 4.4.5 还可对极集与零化子作出进一步的结论. 设 $A \subset X$, $F \subset X^*$. 已指出 ${}^0F$ 与 ${}^\perp F$ 分别为闭绝对凸集与闭子空间,因而都是弱闭集(用 4.4.5(iii)). 于是由对偶性得出, A^0 与 $A^\perp$ 在 X^* 中是弱*闭的. 其次,利用 4.4.4可将式(5)改写为

$$A^0 = (\overline{(\text{abco}\,A)}_w)^0, \qquad A^\perp = (\overline{(\text{span}\,A)}_w)^\perp. \tag{5$'$}$$

然后由对偶性得出(6)的以下推广:

$${}^0F = {}^0(\overline{(\text{abco}\,F)}_{w^*}), \qquad {}^\perp F = {}^\perp(\overline{(\text{span}\,F)}_{w^*}). \tag{6$'$}$$

对于弱拓扑的研究,公式(12)～(15)及(5)$'$,(6)$'$都是很有用的.

4.4.4 与 4.4.5 固然都是极理想的结论,但在应用时仍要小心,特别应注意凸性的作用. 为强调这一点,现在来指明,就弱闭性而言,赋范空间中的球与球面有多大差别. 设 X 是一无限维赋范空间, B 是其中的闭单位球, $S = \partial B$,它们显然都是闭集, B 也是弱闭集, S 则不是. 事实上,颇令人惊异的是,有 $0 \in \overline{S}_w$. 为证此,只要指明,对任给有限集 F,有 $S \cap {}^0F \neq \varnothing$,而这由 $S \cap {}^\perp F \neq \varnothing (\Leftrightarrow {}^\perp F \neq \{0\})$ 推出,注意

$${}^\perp F = \{0\} \Rightarrow X^* = ({}^\perp F)^\perp = \text{span}\,F \qquad (\text{用(15)}).$$

因此,存在网 $\{x_t\} \subset S$,使得 $x_t \rightharpoonup 0$. 这典型地显示出弱拓扑与原拓扑的差别. 不过,也不能将以上结论加强为:存在序列 $\{x_n\} \subset S$,使得 $x_n \rightharpoonup 0$. 例如对于空

间 l^1，$x_n \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow x_n \to 0$（参考[12，p. 287]），当 $\{x_n\} \subset S$ 时绝不可能 $x_n \rightharpoonup 0$.

D. 弱紧集与弱有界集

如果说，弱闭集太少而有所不便的话，那么弱紧集一般远比紧集为多，则是弱拓扑的主要优点之一.

4.4.6 定理（Banach-Alaoglu　1940）　若 $V \subset X$ 是 0-邻域或弱 0-邻域，则 V^0 是弱 * 紧集；若 $F \subset X^*$ 为弱 * 0-邻域，则 ${}^0F$ 是弱紧集.

证　只要证前一半. 令 $D = \{\alpha \in \mathbf{K}: |\alpha| \leqslant 1\}$，则由 Tychonoff 定理知 D^V 是紧空间. 定义

$$T: V^0 \to D^V, \qquad f \to f \mid V.$$

因 V 是吸收集，故 f 完全决定于 $f \mid V$，且

$$f_t(x) \to f(x)(\forall x \in X) \Leftrightarrow f_t(x) \to f(x)(\forall x \in V).$$

因此，当 V^0 中用弱 * 拓扑时，$T: V^0 \to TV^0$ 是一个同胚. 余下只要证明 TV^0 在 D^V 中为闭集（因而为紧集）. 设 $\{f_t\} \subset V^0$ 是一个网，$f \in D^V$，$f_t(x) \to f(x)(\forall x \in V)$，则 $\forall x \in X$，$\lim\limits_t f_t(x)$ 必存在，仍记为 $f(x)$，$f(x)$ 必是线性的，且在 V 上有界，因而 $f \in (X_w)^* = X^*$，故 $f \in V^0$. 因此 TV^0 为闭集，如所要证. □

定理 4.4.6 无疑是深刻的（注意这得归因于 Tychonoff 定理），但其表述形式却不便于直接应用. 问题在于，它并未直接指出，形如 V^0 的集具体包括哪些？下面的推论给出一部分回答.

4.4.7 推论　当以下条件之一满足时 $F \subset X^*$ 是相对弱 * 紧集：

(i) F 等度连续；

(ii) X 可度量化且 F 一致有界；

(iii) X 是赋范空间且 F 范数有界.

若再假定 F 弱 * 闭，则 F 为弱 * 紧集. 特别，若 X 是赋范空间，则 X^* 中的闭球是弱 * 紧集.

证　若 F 等度连续，则必有 X 的 0-邻域 V，使 $F \subset V^0$（参考定义 4.2.6），因而由 V^0 弱 * 紧推出 F 相对弱 * 紧. 再利用 4.2.7，即推出其余结论. □

4.4.7 的最后一个结论最为简单，Banach-Alaoglu 首先证明的也就是这个结论，它正是 Banach-Alaoglu 定理最常用的形式.

弱拓扑的另一个重要特点是，弱有界性重合于原拓扑的有界性.

4.4.8 定理　(i) $A \subset X$ 弱有界 $\Leftrightarrow A$（依原拓扑）有界.

(ii) 设 X 是局部凸的 Fréchet 空间，$F \subset X^*$，则 F 弱 * 有界 $\Leftrightarrow F$ 等度连续 $\Leftrightarrow F$ 一致有界 $\Leftrightarrow$ 存在 X 上的连续半范 $\|\cdot\|$，使得

$$\sup\{|f(x)|: f \in F, \|x\| \leqslant 1\} < \infty. \tag{16}$$

(iii) 设 X 是 Banach 空间,则 $F\subset X^*$ 弱*有界 $\Leftrightarrow$ F 等度连续 $\Leftrightarrow$ F 范数有界 $\Leftrightarrow$ F 相对弱*紧.

证 (i) 首先注意,利用§4.1(17)得出(参照(11)):

$$A\text{ 弱有界} \Leftrightarrow \text{每个 } f\in X^* \text{ 在 } A \text{ 上有界.} \tag{17}$$

因此 A 有界 $\Rightarrow A$ 弱有界. 其次设 A 弱有界. 任给闭绝对凸 0-邻域 $V\subset X$,V^0 是弱*紧凸集(依 4.4.6). 对 $A(\subset X_w^{**})$ 应用 4.2.8(ii)得出:A 在 V^0 上一致有界,这意味着存在 $\beta>0$,使得 $|f(x)|\leqslant\beta(\forall f\in V^0,\forall x\in A)$,这相当于 $A\in\beta^0(V^0)=\beta V$ (用(12)),故 A 有界.

(ii) 如同(17)一样有

$$F\text{ 弱}^*\text{ 有界} \Leftrightarrow F(x)=\{f(x):f\in F\}\text{ 有界}(\forall x\in X). \tag{18}$$

若 F 等度连续,则有 X 的 0-邻域 U,使得 $\forall f\in F,\forall x\in U$,有 $|f(x)|\leqslant 1$. $\forall x\in X$,取 $\beta\in\mathbf{K}$,使 $x\in\beta U$,则 $|f(x)|\leqslant|\beta|(\forall f\in F)$,故 F 弱*有界,这并不需要 X 是 Fréchet 空间. 若 X 是 Fréchet 空间,F 弱*有界,则应用 4.2.9 推出 F 等度连续. 其余结论由 4.2.7 推出.

结合(ii)与 4.4.7 显然推出(iii). □

对于 4.4.8(iii),F 范数有界 $\Rightarrow F$ 相对弱*紧并不用到 X 的完备性. 但反向推理确需 X 完备,说明这一点的反例如下:设 X 是 l^1 的子空间,$x=(x_i)\in X\Leftrightarrow$ 当 i 充分大时 $x_i=0$,$F=\{y^{(i)}:i\geqslant 0\}\subset l^\infty=(l^1)^*$,其中 $y^{(0)}=0$,$y^{(i)}=(i\delta_{ij}:j\in\mathbf{N})(i\geqslant 1)$. F 显然范数无界但弱*紧:设 $\mathscr{U}$ 是 F 的弱*开覆盖,取 $U\in\mathscr{U}$ 使 $0\in U$,取有限集 $A\subset X$ 使 $A^0\subset U$. 易见当 i 充分大时 $y^{(i)}\in A^0$,故 $F\backslash U$ 为有限集,因此 $\mathscr{U}$ 有有限子族覆盖 F.

熟知在一般 TVS 中全有界性强于有界性. 今指出在 X_w 中二者是等价的.

4.4.9 命题 $A\subset X$ 弱有界 $\Leftrightarrow$ A 为弱全有界集,$F\subset X^*$ 弱*有界 $\Leftrightarrow$ F 为弱*全有界集.

证 设 A 弱有界,则 A 有界(4.4.8(i)). 任给 X_w 的 0-邻域 $V={}^0F$,$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$,令(参看 4.4.3 之证)

$$T:X\to\mathbf{K}^n,x\to(f_i(x)),$$

则 TA 在 $\mathbf{K}^n$ 中有界,因而全有界. 令

$$W=\{(\alpha_i)\in\mathbf{K}^n:\max|\alpha_i|\leqslant 1\},$$

则 $V=T^{-1}W$. 取有限集 $E\subset TA$,使 $TA\subset E+W$;取有限集 $B\subset A$,使 $TB=E$,则

$$A\subset T^{-1}(E+W)=B+V,$$

这表明 A 是弱全有界的. □

我们已看到,在一致空间(因而在 TVS)中,紧性、全有界性与完备性三者

密切相关(参考 3. 1. 11, 3. 2. 3 及 4. 1. 7). 本节考察了弱紧性与弱全有界性($\Leftrightarrow$弱有界性),自然应与弱完备性联系起来.

设 $\{f_t\}\subset X^*$ 是一个网. $\{f_t\}$ 是弱* Cauchy 网的充要条件是: $\forall x\in X$, $\{f_t(x)\}$ 是 $\mathbf{K}$ 中的 Cauchy 网(参考条件 § 4. 1(16),注意 $\|f\|_x=|f(x)|$ $(x\in X)$ 是 X_w^* 的生成半范族),这等价于 $f_t(x)\to f(x)(\forall x\in X)$, $f(x)$ 是 X 上的线性泛函,但仅当 $f\in X^*$ 时才能说 $f_t\xrightarrow{*}f$. 因此, $F\subset X^*$ 弱* 完备意味着,若 F 中的网 $\{f_t\}$ 在 X 上点态收敛于 f,则必 $f\in F$. $A\subset X$ 弱完备有类似的涵义.

综合 3. 1. 11 与 4. 4. 7～4. 4. 9,得出以下结论:

4. 4. 10 推论　对于 $F\subset X^*$ 以下结论成立:

(i) F 弱* 紧 $\Leftrightarrow$ F 弱* 有界且弱* 完备.

(ii) 若 F 等度连续且弱* 闭,则 F 弱* 完备.

(iii) 若 X 是局部凸的 Fréchet 空间, F 弱* 有界且弱* 闭,则 F 弱* 完备.

(iv) 若 X 是局部凸的 Fréchet 空间,则 X^* 是序列弱* 完备的.

最后一个结论由 4. 2. 10 推出.

E. 度量化问题

弱拓扑的主要缺点之一是,即使原拓扑是可度量化的,弱拓扑一般也不是可度量化的,因而不能用序列收敛来刻画. 例如,由 $x\in\overline{A}_w$ 并不能得出序列 $\{x_n\}\subset A$,使得 $x_n\rightharpoonup x$. 类似的情况常使人深感不便. 不过, X_w 与 X_w^* 不可度量化并不意味着它们不能"部分地"度量化. 不妨只考虑 X_w^* 中的子集. 这里提出的问题是:对于 $F\subset X_w^*$,应对 F 限以何种条件,才能使之可度量化?

注意到弱* 拓扑决定于嵌入 $X_w^*\subset\mathbf{K}^X$,为使 F 可度量化,关键在于找到可数集 $A=\{x_n\}\subset X$,使得有拓扑嵌入

$$F\to\mathbf{K}^A,\qquad f\to(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}.\tag{19}$$

(19)是拓扑嵌入的充要条件是:每个 $f\in F$ 完全决定于序列 $\{f(x_n)\}$,且对于 $\{f_t\}\subset F$ 与 $f\in F$ 有

$$f_t(x_n)\to f(x_n)(\forall n\in\mathbf{N})\Rightarrow f_t\xrightarrow{*}f.\tag{20}$$

在以上分析的基础上,不难建立以下结果.

4. 4. 11 定理　设 X 可分, $F\subset X^*$,则当以下条件之一满足时, F 依弱* 拓扑可分且可度量化:

(i) F 等度连续;

(ii) F 弱* 紧;

(iii) X 是 Fréchet 空间而 F 弱* 有界;

(iv) X 是赋范空间而 F 范数有界.

证 (i) 取 X 的可数稠子集 $A=\{x_n\}$，则 $f\in X^*$ 完全决定于 $\{f(x_n)\}$. 今用 F 等度连续推出(20). $\forall\varepsilon>0$，取 0-邻域 $V\subset X$，使 $|f(x)|<\varepsilon(\forall f\in F, x\in V)$. 取定 $x\in X$，$n\in\mathbf{N}$，使 $x_n-x\in V$. 设 $\{f_t\}\subset F, f\in F, f_t(x_k)\to f(x_k)(\forall k\in\mathbf{N})$. 取 t_0，使得

$$|f_t(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon \qquad (\forall t\geqslant t_0),$$

则当 $t\geqslant t_0$ 时有

$$|f_t(x)-f(x)|\leqslant|f_t(x-x_n)|+|f_t(x_n)-f(x_n)| \\ +|f(x_n-x)|<3\varepsilon,$$

这表明 $f_t(x)\to f(x)$. 故 $f_t\xrightarrow{*} f$，(20)得验. 因此 F 依弱*拓扑可度量化，由 $\mathbf{K}^A$ 可分(依 3.3.5(ii))推出 F 弱*可分.

(ii) 由 3.3.8(iv)推出，只要注意 A (依(i)之证)分离 F 中的点，即当 $f,g\in F, f\neq g$ 时必 $\exists n\in\mathbf{N}$，使 $f(x_n)\neq g(x_n)$.

结合(i)与 4.4.8(ii)直接推出(iii)，(iv). □

一旦能判定 $F\subset X_w^*$ 可度量化，就可充分利用关于度量拓扑的种种结论. 例如，由 4.4.11 推出：

4.4.12 推论 设 X 可分，V 是 X 的 0-邻域，则 V^0 弱*序列紧且弱*可分.

证 由 4.4.6，V^0 弱*紧；由 4.4.11，V^0 依弱*拓扑可度量化；由 3.2.3，V^0 是弱*序列紧的；由 3.3.6，V^0 弱*可分. □

F. 强拓扑

从逻辑上说，弱拓扑只是 X 可能考虑的多种拓扑之一. 在 X 上引进局部凸拓扑的一个一般模式是，取一集族 $\sigma\subset 2^{X^*}$，使其满足条件：

(C_1) $\forall f\in X^*; \{f\}\in\sigma$;

(C_2) $\forall F\in\sigma, x\in X$，有 $\|x\|_F<\infty$ (记号依(11))；

(C_3) $F,G\in\sigma\Rightarrow F\cup G\subset H\in\sigma$;

(C_4) $F\in\sigma, \alpha>0\Rightarrow\alpha F\in\sigma$,

则以 $\{\|\cdot\|_F: F\in\sigma\}$ 为基本半范族在 X 上生成一个局部凸拓扑 τ_σ；$\{{}^0F: F\in\sigma\}$ 是 (X,τ_σ) 的一个局部基；任给网 $\{x_t\}\subset X$，有

$$x_t\to 0(\text{依 }\tau_\sigma)\Leftrightarrow\|x_t\|_F\to 0(\forall F\in\sigma) \\ \Leftrightarrow\forall F\in\sigma, \text{对 } f\in F \text{ 有 } f(x_t)\rightrightarrows 0.$$

因此，拓扑 τ_σ 也称为 σ 中集上一致收敛的拓扑.

对偶地，利用 X 中适当的集族 σ，可定义 X^* 上的局部凸拓扑 τ_σ. 若 σ 是

X^*（或 X）的有限子集之全体，则显然 σ 满足上述的条件$(C_1)\sim(C_4)$，σ 在 X（或 X^*）中导入的拓扑就是弱拓扑 τ_w（或弱*拓扑 τ_w^*）. 注意，有限子集族是满足条件$(C_1)\sim(C_4)$的最小集族. 另一方面，显然条件(C_2)推出 $F\in\sigma$ 皆为弱*有界集（当 $\sigma\subset 2^X$ 满足(C_2)时 $A\in\sigma$ 是弱有界集），弱*有界集族（或弱有界集族）是满足条件$(C_1)\sim(C_4)$的最大集族，它们自然定义出所谓强拓扑.

4.4.13 定义　由 X^* 中弱*有界集之全体在 X 上导入一拓扑 τ_s，称为 X 上的**强拓扑**；由 X 中弱有界（＝有界）集之全体在 X^* 上导入一拓扑 τ_s^*，称为 X^* 上的强拓扑. 分别以 X_s 与 X_s^* 记 (X,τ_s) 与 (X^*,τ_s^*)，拓扑 τ_s 与 τ_s^* 也分别称为 $\beta(X,X^*)$ 拓扑与 $\beta(X^*,X)$ 拓扑.

由前面的分析知，X_s^* 的一个局部基是

$$\{A^0: A\subset X \text{ 是有界集}\},$$

半范 $\|\cdot\|_A$ 正好是集 A^0 的 Minkowski 泛函. 对于 X^* 中的网 $\{f_t\}$，

$$\begin{aligned} f_t\to 0(\text{依 }\tau_s^*) &\Leftrightarrow \text{任给有界集 } A\subset X,\text{有 } \|f_t\|_A\to 0,\\ &\Leftrightarrow \text{任给有界集 } A\subset X,\text{在 } A \text{ 上 } f_t(x)\rightrightarrows 0. \end{aligned}\tag{21}$$

对于 X_s 有类似的结论.

4.4.14 命题　(i) 若 σ 是 X^* 的等度连续子集之全体，则 $\tau_\sigma=\tau$（X 上的原拓扑）；$F\subset X^*$ 等度连续 $\Leftrightarrow\|\cdot\|_F$ 是 X 上的连续半范.

(ii) $\tau\subset\tau_s$；若 X 是 Fréchet 空间，则 $\tau=\tau_s$. ①

(iii) 若 X 是赋范空间，则 τ_s^* 是范数拓扑.

证　(i) 若 $F\subset X^*$ 等度连续，则有 0-邻域 $U\subset X$，使 $U\subset {}^0F$. 另一方面，任给闭绝对凸 0-邻域 $V\subset X$，有 $F=V^0\in\sigma$（用 4.2.7），${}^0F=V$（用(12)）. 综合以上两方面推出 $\tau_\sigma=\tau$.

(ii) 由等度连续蕴涵弱*有界与已证的(i)得出 $\tau\subset\tau_s$（参考 4.4.8 之证）. 若 X 是 Fréchet 空间，则在 X^* 中等度连续 $\Leftrightarrow$ 弱*有界，故 $\tau=\tau_s$.

(iii) 只要注意以下事实：任给 $\{f_n\}\subset X^*$，有

$$\begin{aligned} f_n\to 0(\text{依 }\tau_s^*) &\Leftrightarrow \text{在每个有界集上 } f_n\rightrightarrows 0\\ &\Leftrightarrow \text{在单位球上 } f_n\rightrightarrows 0\\ &\Leftrightarrow \|f_n\|\to 0. \end{aligned}$$

□

§ 4.5　几类特殊局部凸空间

有几类特殊的 LCS，其结构有某些可注意之处，在本节中给以简单讨论.

---

① 对于赋范空间 X，通常称 X 中的范数拓扑为强拓扑.

本节总设 (X,τ) 是 $\mathbf{K}$ 上的 LCS, $X^* = (X,\tau)^*$, τ_w, τ_w^* 等记号依§4.4.

A. 有界型空间

类比于有界线性泛函,引入以下述语:若 X 上一半范 p 在每个有界集上有界,则称 p 为**有界半范**. 直接看出连续半范必为有界半范,反之则未必(对照4.2.1). 于是有以下概念之设.

4.5.1 定义 设 X 是 $\mathbf{K}$ 上的 LCS. 若 X 上的有界半范皆连续,则称 X 为**有界型空间**或囿空间.

看过以下等价刻画之后,对于有界型空间你会看得更清楚些.

4.5.2 定理 对于局部凸空间 X, 以下条件互相等价:

(i) X 是有界型空间;

(ii) 若 $A \subset X$ 是绝对凸集,对任给有界集 $B \subset X$, 有 $\beta > 0$ 使 $B \subset \beta A$, 则 A 是 X 的 0-邻域;

(iii) 任给 LCS Y, 从 X 到 Y 的有界线性算子必连续.

(iv) X 上的有界半范之全体构成生成半范族.

证 (i)⇒(ii). 设 A 依条件(ii), μ_A 是 A 的 Minkowski 泛函,则 μ_A 是半范,只需证 μ_A 连续(用4.1.11). 因 X 是有界型空间,故又只需说明 μ_A 是有界半范,这由 $\beta A \subset \{\mu_A \leqslant \beta\}$ 推出(参看§4.1(11)).

(ii)⇒(iii). 设 $T:X \to Y$ 是有界线性算子. 任给 Y 的绝对凸 0-邻域 V, $A = T^{-1}V$ 是绝对凸集(依4.1.3). 任给有界集 $B \subset X$, 因 TB 有界,故有 $\beta > 0$ 使 $TB \subset \beta V$, 从而 $B \subset \beta A$, 于是由条件(ii)推出 A 是 X 的 0-邻域,且 $TA \subset V$, 这表明 T 连续.

(iii)⇒(i). 设 p 是 X 上的有界半范. 将 p 添加到 X 的某个生成半范族以加强 X 中的拓扑,如此而得的 LCS 记作 X', 则单位算子 $I:X \to X'$ 是有界算子. 由条件(iii), I 应连续,因而 p 为连续半范. 故 X 是有界型空间.

(i)⇔(iv)是明显的. □

一般地,若以 P 记 X 上有界半范之全体,则 P 在 X 上生成一个局部凸拓扑 $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau}$ 显然强于原拓扑 τ. 任给 $A \subset X$, 当 A 为 τ- 有界时任何 $p \in P$ 在 A 上有界,因而 A 必 $\tilde{\tau}$- 有界(参考§4.1(17)). 反之,若 A 为 $\tilde{\tau}$- 有界,它显然必 τ 有界. 因此, $\tilde{\tau}$ 是 X 上使有界集不减少的最强局部凸拓扑. 显然 $(X,\tilde{\tau})$ 是有界型空间, X 是有界型空间 $\Leftrightarrow \tau = \tilde{\tau}$.

4.5.3 推论 (i) 可度量化的 LCS 是有界型空间;

(ii) 若 X 上的弱拓扑 τ_w 不等于原拓扑,则 X_w 必不可度量化.

证 (i)直接由4.5.2(iii)与4.2.1推出.

(ii) 因 X 上的弱有界集即有界集,故 $I:X_w \to X$ 是一个有界算子. 若 X_w

可度量化，则 $I: X_{w} \to X$ 连续，这将推出 τ_{w} 等于原拓扑. □

B. 桶空间与 Montel 空间

4.5.4 定义　绝对凸的闭吸收集称为**桶**. 若 X 是 LCS 且其中的桶皆为 0-邻域，则称 X 为**桶空间**；若再假定 X 中的有界闭集皆为紧集（$\Leftrightarrow$有界集皆为相对紧集），则称 X 为 **Montel 空间**.

若 $A \subset X$ 是一个桶，则由其吸收性得出 $X = \bigcup nA$. 若 X 是第二纲的，则必有 $x_0 \in A^{\circ}$，从而 $A - x_0$ 是 X 的 0-邻域. 但 $A - x_0 \subset A + A \subset 2A$，故 A 为 0-邻域. 这就得出结论：第二纲的 LCS 是桶空间. 因此，桶空间介于局部凸 Fréchet 空间与一般 LCS 之间. 凡需要使用纲论证的问题，可以考虑以桶空间代替 Fréchet 空间. 例如，利用桶空间，可建立如下的一致有界原理（参照 4.2.9).

4.5.5 定理　设 X 是桶空间，Y 是 LCS，$F \subset L(X,Y)$，$\forall x \in X, F(x) \triangleq \{Tx : T \in F\}$ 有界，则 F 等度连续，从而一致有界.

证　任给闭绝对凸 0-邻域 $V \subset Y$，令 $U = \bigcap_{T \in F} T^{-1}V$，则 $F(U) = \bigcup_{T \in F} TU \subset V$，只要指明 U 是 X 的 0-邻域. U 显然是闭绝对凸集. $\forall x \in X$，有 $\beta > 0$ 使 $F(x) \subset \beta V$，从而 $x \in \beta U$，可见 U 是吸收集，因而是一个桶. 因 X 是桶空间，故 U 为 0-邻域，如所要证. □

现在给出桶空间的一些等价刻画.

4.5.6 定理　对于局部凸空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是桶空间；

(ii) X^* 中的弱 * 有界集等度连续；

(iii) X 中的强拓扑 τ_s 重合于原拓扑 τ；

(iv) X 上的下半连续半范皆连续.

证　(i)$\Rightarrow$(ii) 直接从 4.5.5 推出.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 条件(ii)推出在 X^* 中等度连续等价于一致有界，于是由命题 4.4.12(i)知 τ_s 重合于原拓扑 τ.

(iii)$\Rightarrow$(i). 设 $A \subset X$ 是一个桶，$F = A^{0}$. F 显然在 A 上一致有界，这结合 A 是吸收集推出每个 $F(x)(x \in X)$ 有界，即 F 弱 * 有界，因而 ${}^{0}F$ 是 X 的强 0-邻域. 若条件(iii)满足，则 ${}^{0}F$ 为 X 的 0-邻域. 由双极定理（§4.4(12)），有 $A = {}^{0}F$，故 A 是 X 的 0-邻域，因此 X 是桶空间.

(i)$\Rightarrow$(iv). 若 p 是 X 上的下半连续半范，则 $A \triangleq \{p \leqslant 1\}$ 是桶. 若 X 是桶空间，则 A 是 X 的 0-邻域，由此易推出 p 连续.

(iv)$\Rightarrow$(i). 设 $A \subset X$ 是一个桶，则其 Minkowski 泛函 μ_A 是一个半范且 $A \subset \{\mu_A \leqslant 1\}$ (4.1.11). 若 $\mu_A(x) \leqslant 1$，则有 $\alpha_n \downarrow 1$，使得 $x \in \alpha_n A$. 令 $n \to \infty$ 得

$x \in A$，故 $A = \{\mu_A \leqslant 1\}$，因此 $\{\mu_A \leqslant r\} = rA$ 是闭集（$\forall r > 0$）. 这表明 μ_A 下半连续，由条件(iv)推出 μ_A 连续，由引理 4.1.11 推出 A 是 X 的 0-邻域. 故 X 是桶空间. □

定理 4.5.6 结合 4.4.8(ii)得出：局部凸的 Fréchet 空间是桶空间.

4.5.7 定理　设 X 是 Montel 空间，则以下结论成立：

(i) 任给弱*有界集 $F \subset X^*$，F 上的强拓扑合于弱*拓扑；

(ii) X^* 中的序列弱*收敛推出强收敛，X^* 序列弱*完备；

(iii) 若 X 还是 Fréchet 空间，则 X 中的序列弱收敛推出收敛，X 序列弱完备且可分；

(iv) X 是不可赋范的，除非 $\dim X < \infty$.

证　(i) 设在 F 中 $f_t \xrightarrow{*} f$，今要证对任给有界集 $A \subset X$ 有

$$\| f_t - f \|_A \to 0 \qquad (\text{参考 } \S 4.4(21)).$$

因有界集 A 为相对紧集，故必全有界. 由 F 弱*有界推出 ${}^0F$ 是一个桶，因而是 X 的 0-邻域. $\forall \varepsilon > 0$，必存在有限集 $B \subset X$，使 $A \subset B + \varepsilon {}^0F$，由此推出 $\| f_t - f \|_A \to 0$.

(ii) 设在 X^* 中 $f_n \xrightarrow{*} f$，则 $\{f_n\}$ 必弱*有界，因而由(i)推出 $\{f_n\}$ 强收敛于 f. 其次，设序列 $\{f_n\} \subset X^*$ 点态收敛于 X 上某个线性泛函 f. 由 $\{f_n\}$ 弱*有界与 4.5.6 推出 $\{f_n\}$ 等度连续，从而在某 0-邻域 $U \subset X$ 上一致有界(用 4.2.7). 这推出 f 在 U 上有界，因而 $f \in X^*$（用 4.3.1). 故 $f_n \xrightarrow{*} f$，X^* 是序列弱*完备的.

(iii) 现在附设 X 是 Fréchet 空间. 若在 X 中 $x_n \rightharpoonup 0$，则 $\{x_n\}$ 有界(用 4.4.8(i))，因而相对紧，于是有收敛子列. 将此结论用到 $\{x_n\}$ 的每一子列得出 $x_n \to 0$.

若 $\{x_n\}$ 是弱 Cauchy 列，则 $\{x_n\}$ 亦有界，因而上面的推理同样得出 $\{x_n\}$ 收敛(等价于弱收敛). 因此 X 是序列弱完备的.

最后证 X 可分，取 X 的一个生成半范族 $\{\| \cdot \|_i : i \in \mathbf{N}\}$，不妨设 $\| \cdot \|_i$ 对 i 递增. 若 $\forall n \in \mathbf{N}$，有可数集 A_n，使 A_n 依半范 $\| \cdot \|_n$ 在 X 中稠密，则 $\bigcup A_n$ 必在 X 中稠密，因而 X 可分. 若如上的 $\{A_n\}$ 不存在，则对某个 n，如 $n = 1$，如上的 A_1 不存在，因而有不可数集 $B_1 \subset X$，使它关于 $\| \cdot \|_1$ 有界，其中任两点依 $\| \cdot \|_1$ 的距离 $\geqslant \varepsilon > 0$. B_1 必有不可数子集 B_2，它依 $\| \cdot \|_2$ 有界，……，如此相继取出不可数集 B_n，B_n 依 $\| \cdot \|_n$ 有界. 任取 $x_n \in B_n$，对不同的 n，x_n 互异，则 $\{x_n\}$ 有界，它不含收敛子列，这与 X 为 Montel 空间相矛盾.

(iv) 若 $\dim X = \infty$，则 X 必无紧 0-邻域(用 4.1.17)，因而不存在有界 0-

邻域，故 X 是不可赋范的(用 4.1.16). □

C. 归纳极限

一些应用上重要的 TVS，可自然地表为一个升列的极限：$X = \lim\limits_{n} X_n$，即 $X = \bigcup\limits_{n} X_n$，$X_n$ 是 X 的子空间且 $X_n \subset X_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbf{N}$)，X_n 通常是结构较简单或较为被我们所熟知的空间. 若能从对 X_n 所获得的知识顺利地推断出关于 X 的结论，那么对于空间 X 的研究就有了一条简便的途径. 关键的问题是：X 的拓扑结构如何由 X_n 的结构决定？所谓归纳极限拓扑给出了从 $\{X_n\}$ 构成空间 X 的一种重要方法. 为了描述这种有点特别的构成法，首先建立一个关键性的引理.

4.5.8 引理　设 A 是局部凸空间 X 的闭子空间，U 是 A 的凸 0-邻域，$x_0 \in U^c$，则存在 X 的凸 0-邻域 V，使 $U = A \cap V$，$x_0 \overline{\in} V$.

证　设 $U = A \cap W$，W 是 X 的 0-邻域. 取 X 的凸 0-邻域 C，使 $C \subset W$，则 $D = \mathrm{co}(C \cup U)$ 是 X 的凸 0-邻域，且 $U = A \cap D$. 若 $x_0 \in A$，则取 $V = D$ 已合引理要求. 若 $x_0 \overline{\in} A$，则有 X 的凸 0-邻域 B，使 $x_0 \overline{\in} A + B = P^{-1}PB$，此处 $P: X \to X/A$ 是投影. 于是

$$V = D \cap (A + B)$$

是 X 的凸 0-邻域，$x_0 \overline{\in} V$，

$$A \cap V = U \cap (A + B) = U.$$ □

4.5.9 定理　设 $X_n (n \in \mathbf{N})$ 是一族 LCS，X_n 是 X_{n+1} 的闭子空间，$X = \bigcup X_n$，

$$\mathscr{U} = \{U \subset X : U \text{ 是凸集且 } U \cap X_n \text{ 是 } X_n \text{ 的 0- 邻域}(\forall n \in \mathbf{N})\}, \quad (1)$$

则以 $\mathscr{U}$ 为局部基生成 X 上一局部凸拓扑 τ，每个 X_n 是 (X, τ) 的子空间.

证　首先验证 $\mathscr{U}$ 满足 4.1.1 中条件(i)～(v). 条件(i)(iii)(v)(依 4.1.1，下同)明显满足. 若 $0 \neq x_0 \in X$，则有 X_1 的凸 0-邻域 U_1，$x_0 \overline{\in} U_1$. 又有 X_2 的凸 0-邻域 U_2，使 $U_1 = U_2 \cap X_1$，$x_0 \overline{\in} U_2$ (依 4.5.8). ……，如此依次得到 X_n 的凸 0-邻域 U_n，使 $U_{n-1} = U_n \cap X_{n-1}$，$x_0 \overline{\in} U_n$，$n = 2, 3, \cdots$. 于是 $x_0 \overline{\in} \bigcup U_n \triangleq U$，$U \cap X_n = U_n$，因此 $U \in \mathscr{U}$，$x_0 \overline{\in} \bigcap \mathscr{U}$，条件(ii)满足. $\forall U \in \mathscr{U}, n \in \mathbf{N}$，取 X_n 的绝对凸 0-邻域 U_n，使 $U_n \subset U \cap X_n$. 令 $V = \mathrm{co}(\bigcup U_n)$，则 $V \in \mathscr{U}$，当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时 $\alpha V \subset V \subset U$，故条件(iv)满足. 因此 $\mathscr{U}$ 生成 X 上一局部凸拓扑 τ.

给定 $n \in \mathbf{N}$ 与 X_n 的凸 0-邻域 U_n，$\forall k > n$，如同上面之证，可用引理 4.5.8 求得 X_k 的凸邻域 U_k，使 $U_{k-1} = U_k \cap X_{k-1}$. 于是 $U = \bigcup_n^\infty U_k \in \mathscr{U}$，$U_n = U \cap X_n$. 这表明 X_n 是 (X, τ) 的子空间. □

当局部凸空间 (X,τ) 如 4.5.9 那样构成时，称 X 为空间序列 $\{X_n\}$ 的**归纳极限**，写作 $X=\varinjlim X_n$，称 τ 为**归纳极限拓扑**. 若每个 X_n 是 Fréchet 空间，则称 X 为 **LF 空间**.

在运用归纳极限拓扑时，我们并不希望直接利用式(1)与 4.5.8 构成所需的 0-邻域，而是尽可能建立联系于 X_n 与 $X=\varinjlim X_n$ 的一些命题，然后利用这一些命题来处理涉及归纳极限拓扑的问题. 下面的命题是基本的.

4.5.10 命题 设 $X=\varinjlim X_n$ 与 $\mathscr{U}$ 依 4.5.9，则以下结论成立：

(i) $A\subset X$ 有界 $\Leftrightarrow \exists n\in\mathbf{N}$，使 $A\subset X_n$ 且 A 在 X_n 中有界；

(ii) 在 X 中 $x_k\to 0 \Leftrightarrow \exists n\in\mathbf{N}$，使 $\{x_k\}\subset X_n$ 且在 X_n 中 $x_k\to 0$；

(iii) 任给局部凸空间 Y 与线性算子 $T:X\to Y$，T 连续 $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbf{N}, T|X_n$ 连续；

(iv) 若每个 X_n 可分，则 X 可分；

(v) 若每个 X_n 完备，则 X 完备.

证 (i) 设 A 在 X 中有界，$\forall n\in\mathbf{N}$，有 $x_n\in A\backslash X_n$. 取 X_1 的凸 0-邻域 U_1，使 $x_1\,\overline{\in}\,U_1$；取 X_2 的凸 0-邻域 U_2，使 $U_1=X_1\cap U_2, k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,U_2, k=1,2$；又取 X_3 的凸 0-邻域 V_{3k}，使 $U_2=X_2\cap V_{3k}, k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,V_{3k}(k=1,2)$；令 $U_3=V_{31}\cap V_{32}$，则 $U_2=X_2\cap U_3, k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,U_3, k=1,2,3$. 如此无限进行，得凸集列 $\{U_n\}$，使得 $k^{-1}x_k\,\overline{\in}\,U_n(1\leqslant k\leqslant n=1,2,\cdots)$. 于是 $U=\bigcup U_n\in\mathscr{U}$，这与 $\{x_n\}$ 有界矛盾. 因此必有某个 X_n 包含 A，A 显然在 X_n 中有界. 其逆不必证.

(ii)由(i)推出.

(iii) 若每个 $T|X_n$ 连续，则对任给凸 0-邻域 $V\subset Y$，

$$X_n\cap T^{-1}V=(T|X_n)^{-1}V$$

是 X_n 的 0-邻域，因而 $T^{-1}V\in\mathscr{U}$，这表明 T 连续. 其逆不必证.

(iv) 是明显的.

(v) 为简单起见，只证 X 是序列完备的. 设 $\{x_n\}\subset X$ 是一 Cauchy 列，则 $\{x_k\}$ 必有界，因而含于某个 X_n(用已证的(i))，故必收敛. □

D. LF 空间

归纳极限拓扑的主要应用之一，是为广义函数理论中的检验函数空间提供一个有效的描述，后者是一个 LF 空间. 因此，有必要对 LF 空间作某些更详细的讨论. LF 空间除了具有归纳极限的一般性质之外，还有一些非常有趣的特殊性质.

以下设 $X=\varinjlim X_n$ 是给定的 LF 空间. 首先，从已知结论可推出如下结果：

4.5.11 命题 (i) LF 空间 X 是完备的.

(ii) 若 $X_n\neq X(\forall n\in\mathbf{N})$，则 X 必不可度量化.

(iii) 若 Y 是 LCS，$T:X\to Y$ 是一线性算子，则 T 连续 $\Leftrightarrow$ T 有界 $\Leftrightarrow$ 任给收敛序列 $\{x_k\}\subset X$，有 $T\left(\lim_k x_k\right)=\lim_k Tx_k$；若 Y 也是 LF 空间，T 是双射，$x_k\to 0\Leftrightarrow Tx_k\to 0$，则 T 为拓扑同构.

(iv) LF 空间是有界型空间.

证　(i) 直接由 4.5.10(v)推出.

(ii) 若 X 可度量化，则必为 Baire 空间(3.2.6)，因而有某个 X_n 在 X 中含内点(3.2.7)，因而 $X_n=X$ (用 4.1.3(v)).

(iii) 直接由 4.5.10 推出，(iv)由(iii)与 4.5.2 推出. □

4.5.10 与 4.5.11 表明，LF 空间几乎可完全用序列来刻画，因而其行为就好像是一个 Fréchet 空间，尽管它并非 Fréchet 空间(除非是 $X=X_n$ 这种不必考虑的退化情况). 下面是表明 LF 空间类似于 Fréchet 空间的更有趣的结论.

4.5.12 定理(Dieudonné-Schwartz　1949)　设 $X=\varinjlim X_n$ 与 $Y=\varinjlim Y_n$ 是 LF 空间，$T\in L(X,Y)$，则每个 TX_n 含于某个 Y_m，当 $TX=Y$ 时 T 是开映射(对照 4.2.4(i)).

证　取定 $n\in\mathbf{N}$. 因 $X_n=\bigcup_m(X_n\cap T^{-1}Y_m)$，故 $\exists m\in\mathbf{N}$，使 $X_n\cap T^{-1}Y_m$ 在 X_n 中有内点，于是 $X_n\cap T^{-1}Y_m=X_n$ (4.1.3)，即 $TX_n\subset Y_m$.

其次设 $TX=Y$. 为证 T 为开映射，只要证：任给 X 的凸 0-邻域 U，$\forall k\in\mathbf{N}$，$Y_k\cap TU$ 是 Y_k 的 0-邻域(参考 1.3.15 与 4.5.9). 因

$$Y_k=\bigcup_n(Y_k\cap TX_n)=\bigcup_n TZ_{nk},$$

其中 $Z_{nk}=X_n\cap T^{-1}Y_k$ 是 X_n 的闭子空间，故 $\exists n\in\mathbf{N}$，使 TZ_{nk} 是 Y_k 中的第二纲集，因而 $T:Z_{nk}\to Y_k$ 是开映射(用 4.2.3). 这推出

$$T(U\cap Z_{nk})=Y_k\cap T(U\cap Z_n)$$

是 Y_k 的 0-邻域，因此 $Y_k\cap TU$ 是 Y_k 的 0-邻域，如所要证. □

显然，定理 4.5.12 可看作开映射定理的推广. 这就表明，在一个最重要的方面，LF 空间继承了 Fréchet 空间的性质.

我们已经指出，局部凸的 Fréchet 空间是桶空间. 现在指明，LF 空间亦是如此.

4.5.13 命题　LF 空间 $X=\varinjlim X_n$ 是桶空间，如果每个 X_n 是 Montel 空间，则 X 亦是 Montel 空间.

证　若 $A\subset X$ 是一个桶，则 $\forall n\in\mathbf{N}$，$A\cap X_n$ 是 X_n 中的桶，因而是 X_n 的 0-邻域(依 4.5.4). 而这又推出 A 是 X 的 0-邻域(4.5.9)，故 X 是桶空间.

其次设每个 X_n 是 Montel 空间，$A\subset X$ 是有界闭集，则 A 是某个 X_n 的有界闭子集，因而必为紧集. 这表明 X 是 Montel 空间. □

由于有以上结果,可将桶空间的结论用于 LF 空间. 而当 X_n 是 Montel 空间时,又可将 Montel 空间的结论用于 LF 空间. 下面汇集主要的结论以备用.

4.5.14 推论 设 $X=\varinjlim X_n$ 是 LF 空间,则以下结论成立:

(i) 一致有界原理:若 Y 是 LCS, $F\subset L(X,Y)$, $\forall x\in X, F(x)=\{Tx: T\in F\}$ 有界,则 F 等度连续,且一致有界.

(ii) 若 $F\subset X^*$,则 F 弱*有界 $\Leftrightarrow$ F 等度连续 $\Leftrightarrow$ F 一致有界, F 弱*紧 $\Leftrightarrow$ F 弱*闭且弱*有界.

(iii) 若每个 X_n 可分,则 X^* 中的弱*有界序列含弱*收敛子列.

(iv) 若每个 X_n 是 Montel 空间,则 X^* 序列弱*完备, X^* 中的弱*收敛序列必强收敛.

证 (i)由 4.5.5 推出,(ii)由 4.5.6 与 4.4.7 推出,(iii)由(ii)及 4.5.11(iv),4.4.11 推出,(iv)由 4.5.13 与 4.5.7 推出. □

以上结论对于广义函数理论的展开是基本的.

E. Mackey 空间

考察定义 4.4.1 看出,拓扑 $\sigma(X,X^*)$ 与 $\sigma(X^*,X)$ 实际上完全决定于集 X 与 X^*,而与 X,X^* 赋予什么拓扑无关. 因此,若 X 上的局部凸拓扑 τ_1 使得 $(X,\tau_1)^*=X^*$,则以 τ_1 替换 τ 并不改变拓扑 $\sigma(X,X^*)$ 与 $\sigma(X^*,X)$. 如上的 τ_1 称为 τ 的**相容拓扑**. 显然,这种意义上的相容性是一等价关系. 如何判定 τ_1 与 τ 相容? 以下定理给出了一个很简单的方法.

4.5.15 定理(Mackey-Ares) 设 τ_1 是 X 上的局部凸拓扑,则 τ_1 与 τ 相容 $\Leftrightarrow$ $\tau_w\subset\tau_1\subset\tau_\sigma$,此处 τ_σ 是 X 上由集族 $\sigma=\{F\subset X^*: F$ 是绝对凸弱*紧集$\}$ 生成的拓扑(参考§4.4E).

证 首先设 τ_1 与 τ 相容. 直接看出 $\tau_w\subset\tau_1$. 任给 (X,τ_1) 的绝对凸闭 0-邻域 V,有 $V^0\in\sigma$(用 4.4.6,注意 V^0 不依赖于 τ_1),于是 ${}^0(V^0)$ 是 (X,τ_σ) 的 0-邻域. 但由双极定理有 $V={}^0(V^0)$,故得 $\tau_1\subset\tau_\sigma$.

其次设 $\tau_w\subset\tau_1\subset\tau_\sigma$,则 $X^*=(X,\tau_w)^*\subset(X,\tau_1)^*\subset(X,\tau_\sigma)^*$,只要证 $(X,\tau_\sigma)^*\subset X^*$. $\forall F,G\in\sigma$,有 $F\cup G\subset F+G\in\sigma$(参考命题 4.1.3 与 4.1.7). 由此易见 σ 满足§4.4E 中的条件$(C_1)\sim(C_4)$,因此 $\{\|\cdot\|_F: F\in\sigma\}$ 是 (X,τ_σ) 的基本半范族. 任给 $f\in(X,\tau_\sigma)^*$,必有 $F\in\sigma$,使 $|f(x)|\leqslant\|x\|_F(\forall x\in X)$. 这推出 $f\in({}^0F)^0$,此处 $({}^0F)^0$ 是对 $(X,\tau_\sigma)^*$ 取的. 因 F 在 $(X,\tau_\sigma)^*$ 中也是弱*紧的,故由双极定理有 $f\in F\subset X^*$. □

4.5.15 表明,与 τ 相容的局部凸拓扑全部介于 τ_w 与 τ_σ 之间,当然也包括 τ_w 与 τ_σ,二者分别为与 τ 相容的最小与最大局部凸拓扑. τ_w 是我们所熟知的,关于 τ_σ 则设立以下概念.

4.5.16 定义　与 X 上的原拓扑 τ 相容的最大局部凸拓扑称为 τ 的 **Mackey 拓扑**，记作 $\tau(X,X^*)$. 于是 $\tau_w \subset \tau \subset \tau(X,X^*)$. 若 $\tau = \tau(X,X^*)$，则称 (X,τ) 为 **Mackey 空间**.

注意对任何与 τ 相容的局部凸拓扑 τ_1，$\tau(X,X^*)$ 也是 τ_1 的 Mackey 拓扑，特别，$\tau(X,X^*)$ 是 τ_w 的 Mackey 拓扑. 每个局部凸空间 (X,τ) 对应唯一的 Mackey 空间，即 $(X,\tau(X,X^*))$. 以 $\tau(X^*,X)$ 记 τ_w^* 的 Mackey 拓扑，由对偶性（参看定理 4.4.2 及其后的说明），$\tau(X^*,X)$ 就是由集族 $\{A \subset X : A$ 是绝对凸弱紧集$\}$生成的拓扑.

因 X 中的 τ 有界与 $\tau(X,X^*)$ 有界一致（由 4.4.8(i)，有界仅决定于 X^* !），故单位算子 $I:(X,\tau) \to (X,\tau(X,X^*))$ 是有界算子. 因此当 X 为有界型空间时必 $\tau = \tau(X,X^*)$（用 4.5.2）. 这表明有界型空间是 Mackey 空间，特别，可度量化的 LCS 是 Mackey 空间.

4.5.17 定义　设 X 是 LCS. 若 $(X_w^*)^* = (X_s^*)^*$ ($\Leftrightarrow X = (X_s^*)^*$)，则称 X 为**半自反空间**；若 X 与 X_w^* 均为半自反空间且 $\tau = \beta(X,X^*)$，则称 X 为自反 LCS，简称为**自反空间**.

由定义直接看出，X 是半自反空间 $\Leftrightarrow$ τ_s^* 是 τ_w^* 的 Mackey 拓扑. 因此，X 是自反空间 $\Leftrightarrow$ τ_s 与 τ_s^* 分别为 τ_w 与 τ_w^* 的 Mackey 拓扑且 $\tau = \tau_s$. 可见自反空间是 Mackey 空间，由 4.5.6，自反空间是桶空间.

若 X 的每个有界 Cauchy 网收敛，则称 X 为**拟完备空间**（或有界完备空间）. 显然，X 是拟完备的 $\Leftrightarrow$ X 中每个有界闭集是完备的.

4.5.18 定理　对于局部凸空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是半自反的；

(ii) $\beta(X^*,X) = \tau(X^*,X)$；

(iii) X 中的有界弱闭集为弱紧集（$\Leftrightarrow$有界集为相对弱紧集）；

(iv) X 是弱拟完备的.

证　已直接从定义 4.5.17 看出(i)$\Leftrightarrow$(ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii). 设(ii)成立，$A \subset X$ 是一有界弱闭集，则 A^0 是 $(X,\tau(X^*,X))$ 的 0-邻域（参考 4.4.13）. 于是有绝对凸弱紧集 $B \subset X$，使得 $B^0 \subset A^0$，从而 $A \subset {}^0(B^0) = B$（用 §4.4(12)），这推出 A 为弱紧集.

(iii)$\Rightarrow$(ii). 任给有界集 $A \subset X$，$\overline{\text{abco}\, A}$ 是有界弱闭集（用 4.1.6(v) 与 4.4.5），因而依条件(iii)是弱紧集，于是 $A^0 = (\overline{\text{abco}\, A})^0$（用 §4.4(5)）是 $(X,\tau(X^*,X))$ 的 0-邻域. 这表明

$$\beta(X^*,X) \subset \tau(X^*,X),$$

因而(ii)成立.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv). 显然(iii)$\Rightarrow$(iv). 反之，若 X 是弱拟完备的，$A \subset X$ 是有界弱

闭集，则 A 是弱完备且弱全有界的(依 4.4.9)，因而是弱紧的(依 3.1.11). 这表明(iv)⇒(iii).

§ 4.6　拓扑向量空间的例子

应用上常见的 TVS，大多是局部凸的函数空间，且其中不少还是 Fréchet 空间. 本节汇集若干典型例子，它们一方面可对本章内容起阐释作用，同时也供应用时备查. 自然，本节不必包含将在 § 5.6 中讨论的那些函数空间.

A. 部分一致收敛空间

任给非空集 Ω，$\mathbf{K}^\Omega$ 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间(参考 § 1.2C). 应用上常见的 TVS，大都是 $\mathbf{K}^\Omega$ (对某个适当的 Ω)的向量子空间并带有适当的局部凸拓扑. 实际上，在 § 4.4 中讨论过的空间 X_w 与 X_w^* (以及 X_s 与 X_s^*)，正是这种形式下的 LCS，而且，在 § 4.4 中定义弱拓扑与强拓扑的方法，正好推广而用于在 $\mathbf{K}^\Omega$ 的子空间中定义各种局部凸拓扑. 类比于 § 4.3(11)，约定记号：

$$\| x \|_A = \sup_{t \in A} | x(t) | \qquad (x \in \mathbf{K}^\Omega, A \subset \Omega). \tag{1}$$

显然 $X \triangleq \{x \in \mathbf{K}^\Omega : \| x \|_A < \infty\}$ 是一个向量空间，且 $\| \cdot \|_A$ 是 X 上的一个半范；对于 $\{x_n\} \subset X$，有

$$\| x_n \|_A \to 0 \Leftrightarrow \text{在 } A \text{ 上 } x_n(t) \rightrightarrows 0.$$

若 $\mathscr{A} \subset 2^\Omega$，$X = \{x \in \mathbf{K}^\Omega : \| x \|_A < \infty (\forall A \in \mathscr{A})\}$，则半范族

$$\{ \| \cdot \|_A : A \in \mathscr{A}\}$$

在 X 上生成一个局部凸拓扑. 适当地选择集族 $\mathscr{A}$，就得到各种具体的 LCS. 因这些空间的收敛就是在每个 $A \in \mathscr{A}$ 上的一致收敛，我们称这类空间为**部分一致收敛空间**[①]. 基本的结论可表为如下一般命题.

4.6.1 引理　设 X 是 $\mathbf{K}^\Omega$ 的向量子空间，$\mathscr{A} \subset 2^\Omega$ 满足条件：

(C_1) $\mathscr{A}$ 覆盖 Ω 且 $\varnothing \,\overline{\in}\, \mathscr{A}$；

(C_2) $\forall x \in X, A \in \mathscr{A}$，有 $\| x \|_A < \infty$；

(C_3) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow \exists C \in \mathscr{A} : A \cup B \subset C$，

则有以下结论：

(i) 以 $\{ \| \cdot \|_A : A \in \mathscr{A}\}$ 为基本半范族在 X 上生成一个局部凸拓扑，依此拓扑，X 中的收敛就是在每个 $A \in \mathscr{A}$ 上一致收敛且在 Ω 上处处收敛(若除去条件(C_3)，则 $\{ \| \cdot \|_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是生成半范族而未必为基本半范族).

---

① 这一术语并不通用，此处姑且用之，意在强调这类空间的基本特征.

(ii) 若 X 对于"每个 $A \in \mathscr{A}$ 上一致收敛"封闭，则 X 是完备 LCS；若进而设 $\mathscr{A}$ 是可数族，则 X 是 Fréchet 空间.

(iii) 若 $\mathscr{A},\mathscr{B} \subset 2^{\Omega}$ 均满足条件(C_1)，(C_2)，每个 $A \in \mathscr{A}$ 含于 $\mathscr{B}$ 中有限个集之并，每个 $B \in \mathscr{B}$ 含于 $\mathscr{A}$ 中有限个集之并，则由 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 在 X 上导入同一局部凸拓扑.

以上结论的证明是平凡的.

选择不同的 $\Omega,\mathscr{A},X$，得到以下具体结论.

1°　设 Ω 是任一非空集，$X = \mathbf{K}^{\Omega}$，$\mathscr{A}$ 是 Ω 的非空有限子集之全体，则 X 依基本半范族 $\{\|\cdot\|_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是一完备 LCS，其中的收敛即点态收敛，因而 X 中的拓扑即 $\mathbf{K}^{\Omega}$ 中的积拓扑. 如此构成的局部凸空间下面记作 $F(\Omega)$. 显然，$F(\Omega)$ 是 Fréchet 空间 $\Leftrightarrow$ Ω 是可数集. 因此，$F(\mathbf{N})$ 是一个 Fréchet 空间，通常将其记为 s. 在 s 中可定义准范数如下(参照 § 4.1(20))：

$$\|x\| = \sum_i 2^{-i}(|x_i| \wedge 1) \qquad (x = (x_i) \in s). \tag{2}$$

由 § 4.1(17)，$A \subset s$ 有界 $\Leftrightarrow \forall i \in \mathbf{N}$，有 $\sup\limits_{x\in A}|x_i| < \infty \Leftrightarrow A$ 中的元依坐标有界. 由此推出，s 的任何 0-邻域无界，可见 s 不可能是可赋范空间(参看 4.1.16).

2°　设 Ω 是任一 LCH，$X = C(\Omega)$，$\mathscr{K}$ 是 Ω 中一族非空紧集且 $\{K^{\circ} : K \in \mathscr{K}\}$ 覆盖 Ω，则 X 依半范族 $\{\|\cdot\|_K : K \in \mathscr{K}\}$ 是一完备 LCS，其中的收敛就是在紧集上一致收敛，通常称为**紧一致收敛**. 完备性的理由是：若 $\{x_{\alpha}\} \subset C(\Omega)$ 在每个紧集上一致收敛，则在 Ω 的每点的一邻域内一致收敛(用 Ω 为 LCH!)，因而其极限函数必连续. 若 Ω 是第二可数的 LCH，取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_n\}$ (依 2.2.13)，则 $C(\Omega)$ 中的局部凸拓扑亦可由半范族 $\{\|\cdot\|_{K_n} : n \in \mathbf{N}\}$ 生成(用 4.6.1(iii))，因此 $C(\Omega)$ 是一个 Fréchet 空间，它的一个局部基是

$$\{B_n : n \in \mathbf{N}\}, B_n = \{x \in C(\Omega) : \|x\|_{K_n} < 1/n\}, \tag{3}$$

特别，任给非空开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$，$C(\Omega)$ 依紧一致收敛为 Fréchet 空间. 若 B_n 依式(3)，则可说明 $B_n \not\subset \mathrm{const}\, B_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$，因此 B_n 皆无界. 这表明 $C(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbf{R}^m)$ 是不可赋范的.

3°　设 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是任一非空开集，$H(\Omega)$ 是 Ω 上的解析函数之全体，$\mathscr{K}$ 如同 2°，则 $H(\Omega)$ 依半范族 $\{\|\cdot\|_K : K \in \mathscr{K}\}$ 是一 Fréchet 空间，其中的收敛为紧一致收敛(即复变函数论中通常所说的**内闭一致收敛**). $H(\Omega)$ 的完备性基于以下事实：内闭一致收敛的解析函数序列的极限函数是解析函数. 利用有关解析函数正规族的结论(参考[17，定理 4.4.4])，可知 $H(\Omega)$ 是 Montel 空间(参看 4.5.4 与 4.5.6). 显然 $\dim H(\Omega) = \infty$，故 $H(\Omega)$ 是不可赋范的(依 4.5.7).

B. 空间 $\mathscr{E}(\Omega)$.

取定非空开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 与 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_m\}$. 定义

$$\| u \|_m = \sup_{x \in K_m, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha u(x)| \quad (u \in C^\infty(\Omega)), \tag{4}$$

其中用了在文献中通行的缩记号：

$$\begin{cases} \partial^\alpha u(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \qquad |\alpha| = \sum_i \alpha_i, \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

易验证由(4)定义一个随 m 递增的半范族，它分离 $C^\infty(\Omega)$ 中的元. 因此，以 $\{\| \cdot \|_m : m \in \mathbf{N}\}$ 为基本半范族在 $C^\infty(\Omega)$ 中生成一个局部凸拓扑(参考 4.1.12)，当 $C^\infty(\Omega)$ 装备此拓扑时记作 $\mathscr{E}(\Omega)$. 容易看出，对任给序列 $\{u_k\} \subset \mathscr{E}(\Omega)$，有

$$u_k \to 0 \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n : \{\partial^\alpha u_k(x)\} \text{ 紧一致收敛于零.} \tag{6}$$

可见 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中的拓扑与 $\{K_m\}$ 的选择无关. 对任给 $A \subset \mathscr{E}(\Omega)$，

$$A \text{ 有界} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n : \{\partial^\alpha u : u \in A\} \text{ 在 } \Omega \text{ 的任何紧子集上一致有界.} \tag{7}$$

4.6.2 命题 $\mathscr{E}(\Omega)$ 是不可赋范的 Fréchet 空间，且是 Montel 空间.

证 首先证完备性. 设 $\{u_k\}$ 是 Cauchy 列，则 $\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n$，$\{\partial^\alpha u_k\}$ 是 $C(\Omega)$ 中的 Cauchy 列，因而有 $u^\alpha \in C(\Omega)$，使得 $\{\partial^\alpha u_k\}$ 在 Ω 内紧一致收敛于 u^α. 令 $u = u^0$，则对 $|\alpha|$ 用归纳法可验证 $\partial^\alpha u = u^\alpha$. 因此 $u \in C^\infty(\Omega)$，对照(6)看出在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中 $u_k \to u$. 因此 $\mathscr{E}(\Omega)$ 完备，故为 Fréchet 空间.

其次证 $\mathscr{E}(\Omega)$ 是 Montel 空间，只要指出任何有界序列 $\{x_k\} \subset \mathscr{E}(\Omega)$ 必有收敛子列. $\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n$，由(7)知 $\{\partial^\alpha u_k\}$ 在 Ω 的每个紧集上一致有界. 于是可用 Arzela-Ascoli 定理(见 5.6.2)推出，$\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n$，紧集 $K \subset \Omega$，$\{\partial^\alpha u_k\}$ 有子列在 K 上一致收敛. 用一个标准的“对角线程序”，可选出 $\{u_k\}$ 在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中的收敛子列.

因 $C^\infty(\Omega)$ 显然是无限维的，故 $\mathscr{E}(\Omega)$ 是不可赋范的. □

类似于 $\mathscr{E}(\Omega)$，对任给 $r \in \mathbf{Z}_+$，可将 $C^r(\Omega)$ 定义为一个 Fréchet 空间，通常记作 $\mathscr{E}^r(\Omega)$.

C. 检验函数空间

设 Ω 与 $\{K_m\}$ 仍如上段，令

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \text{ 是紧集}\};$$

$$\mathscr{D}(K_m) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset K_m\}.$$

$\mathscr{D}(K_m)$ 作为 $\mathscr{E}(\Omega)$ 的闭子空间是一局部凸的 Fréchet 空间，且显然 $\mathscr{D}(K_m) \subset \mathscr{D}(K_{m+1})$ ($\forall m \in \mathbf{N}$). 于是

$$\mathscr{D}(\Omega) = \varinjlim D(K_m)$$

是一个 LF 空间，它就是 Schwartz 所称的**检验函数空间**，其对偶空间记作 $\mathscr{D}'(\Omega)$，以与广义函数论中通行的记号一致. 依据 Schwartz，任何 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 称为 Ω 内的**分布**或**广义函数**. 综合 LF 空间与空间 $\mathscr{E}(\Omega)$ 的性质(依 4.5.10～4.5.14 与 4.6.2)，对空间 $\mathscr{D}(\Omega)$ 可得出如下结论：

4.6.3 命题　(i) $A \subset \mathscr{D}(\Omega)$ 有界的充要条件是：存在紧集 $K \subset \Omega$，使 $A \subset \mathscr{D}(K)$，且 $\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n$，$\{\partial^\alpha u : u \in A\}$ 在 K 上一致有界.

(ii) 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $u_k \to 0$ 的充要条件是：存在紧集 $K \subset \Omega$，使得 $\{u_k\} \subset \mathscr{D}(K)$，$\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^n$，在 K 上 $\partial^\alpha u_k \rightrightarrows 0$.

(iii) $\mathscr{D}(\Omega)$ 是完备 LCS 但不可度量化.

(iv) $\mathscr{D}(\Omega)$ 是 Montel 空间.

(v) 一个线性泛函 $f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbf{K}$ 是分布的充要条件是：若在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $u_k \to 0 (k \to \infty)$，则 $f(u_k) \to 0$. 而这又等价于：对任给紧集 $K \subset \Omega$，存在 $m \in \mathbf{N}$ 与 $\beta > 0$，使得

$$|f(u)| \leqslant \beta \|u\|_m \qquad (\forall u \in \mathscr{D}(K)), \tag{8}$$

其中

$$\|u\|_m = \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha u(x)|.$$

(vi) $\mathscr{D}'(\Omega)$ 是序列弱 * 完备的，其中的弱 * 序列收敛等价于强收敛；$F \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ 弱 * 有界 $\Leftrightarrow$ F 一致有界.

D. 速降函数空间

对任给 $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，$\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$，定义

$$\|u\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|, \tag{9}$$

其中 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} (x = (x_i), \alpha = (\alpha_i))$. 令

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : \|u\|_{\alpha,\beta} < \infty (\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n)\}, \tag{10}$$

称每个 $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 为**速降函数**. $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 速降意味着：$\forall m \in \mathbf{N}$，$\forall \beta \in \mathbf{Z}_+^n$，当 $|x| \to \infty$ 时 $\partial^\beta u(x)$ 比 $|x|^{-m}$ 更快地趋于零. 关于空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 的主要结论如下：

4.6.4 命题　(i) $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 依可数半范族 $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n\}$ 是一个局部凸的 Fréchet 空间，在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中 $u_k \to 0$ 意味着：对任给 $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$ 有

$$x^\alpha \partial^\beta u_k(x) \rightrightarrows 0 \qquad (k \to \infty, x \in \mathbf{R}^n).$$

(ii) $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 是一个 Montel 空间.

(iii) 若 $1 \leqslant p < \infty$，则包含 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n)$ 是连续的.

(iv) $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，$u \to \hat{u}$ 是一拓扑同构，其中 $\hat{u}$ 记 u 的 Fourier 变换.

证 (i) 只要考虑完备性. 设 $\{u_k\}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中的 Cauchy 列. $\forall \beta \in \mathbf{Z}_+^n$, $\{\partial^\beta u_k\}$ 必在 $\mathbf{R}^n$ 上一致收敛于某个 $u^\beta \in C(\mathbf{R}^n)$, 于是如同 4.6.2 之证有 $u^\beta = \partial^\beta u, u = u^0$. 固定 $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $k_0 \in \mathbf{N}$, 使得

$$|x^\alpha[\partial^\beta u_k(x) - \partial^\beta u_l(x)]| < \varepsilon \qquad (k, l \geqslant k_0, x \in \mathbf{R}^n).$$

令 $l \to \infty$ 得 $\|u_k - u\|_{\alpha,\beta} \leqslant \varepsilon (k \geqslant k_0)$. 这正表明在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中 $u_k \to u (k \to \infty)$.

(ii) 设 $\{u_k\} \subset \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 是一有界序列, 则它在 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 中亦有界, 于是由 4.6.2有子列, 不妨仍记作 $\{u_k\}$, 依 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 中的拓扑收敛于某个 $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 由 $\{u_k\}$ 在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中的有界性易推出 $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 且在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中 $u_k \to u (k \to \infty)$. 故 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 为 Montel 空间.

(iii) 这由以下事实推出: $\forall u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\|u\|_p^p \leqslant \|(1+|x|^2)^{n+1} u\|_0 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|u(x)|^{p-1}}{(1+|x|^2)^{n+1}} \mathrm{d}x.$$

(iv) $\forall u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$, 由直接计算有

$$\xi^\alpha \partial^\beta \hat{u}(\xi) = \mathrm{const}[\partial^\alpha (x^\beta u(x))]^\wedge(\xi),$$

上式右端有界, 因此 $\hat{u} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. 若在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中 $u_k \to u, \hat{u}_k \to v$, 则

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - v\|_0 &\leqslant \|\hat{u} - \hat{u}_k\|_0 + \|\hat{u}_k - v\|_0 \\ &\leqslant \|u - u_k\|_{L^1} + \|\hat{u}_k - v\|_0 \to 0 (k \to \infty), \end{aligned}$$

其中用了已证的(iii). 故得 $\hat{u} = v$, 因而由闭图像定理(4.2.5)知映射 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), u \to \hat{u}$ 连续. $\forall u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \hat{u} \in L^1$, 因而由 Fourier 变换的反演定理有 $u = \hat{v}, v \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. 这表明 $u \to \hat{u}$ 是一双射, 因而为同胚. □

E. 空间 $S(\Omega)$

设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 是一测度空间, $\mu\Omega < \infty$. 以 $S(\Omega)$ 记 Ω 上几乎处处有限的可测函数之全体, 几乎处处相等的函数不加区别. 定义

$$\|x\| = \int_\Omega [|x(t)| \wedge 1] \mathrm{d}\mu \quad (x \in S(\Omega)). \tag{11}$$

4.6.5 命题 $S(\Omega)$ 依准范数(11)为 Fréchet 空间, 其中的收敛为依测度收敛. 若 μ 满足条件:

(C) $\forall A \in \mathscr{A}, \forall r \in (0, \mu A), \exists B \in \mathscr{A}$, 使 $B \subset A, \mu B = r$,

则 $S(\Omega)^* = \{0\}$, 因而 $S(\Omega)$ 不是 LCS.

证 由(11)定义的 $\|\cdot\|$ 显然满足 1.4.10 中条件(i)～(iii). 任给序列 $\{x_n\} \subset S(\Omega), \varepsilon \in (0,1)$ 有

$$\|x_n\| \geqslant \varepsilon \cdot \mu\{|x_n| \geqslant \varepsilon\}.$$

由此可见 $\|x_n\| \to 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{\mu} 0$ (依测度 μ 收敛). 反之, 若 $x_n \xrightarrow{\mu} 0$, 则由

$$\|x_n\| \leqslant \varepsilon\mu\Omega + \mu(\{|x_n| \geqslant \varepsilon\})$$

看出 $\|x_n\| \to 0$. 这就得出

$$\|x_n\| \to 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\mu} 0 \qquad (n \to \infty). \tag{12}$$

利用测度收敛的性质,由此又推出 $\|\cdot\|$ 满足 1.4.10 之条件(iv),因此 $(S(\Omega), \|\cdot\|)$ 是一个赋准范空间.(12)表明 $S(\Omega)$ 中的收敛就是依测度收敛.

若 $\{x_n\} \subset S(\Omega)$ 为 Cauchy 列,则可取出 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得

$$\sum_k \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty.$$

记 $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, 则

$$\int_\Omega \sum_k (|y_k| \wedge 1) \mathrm{d}\mu = \sum_k \|y_k\| < \infty,$$

因而 $\sum(|y_k| \wedge 1) < \infty$, a.e., 这推出 $\sum |y_k| < \infty$, a.e.. 因此 $\{x_{n_k}\}$ 在 Ω 上几乎处处收敛,从而依测度收敛于某个 $x \in S(\Omega)$. 这表明 $S(\Omega)$ 是完备的.

现在设条件(C)满足, $f \in S(\Omega)^*$. 因 $L^1(\Omega)$ 中的收敛蕴涵测度收敛(参看§5.6A),故 $f \mid L^1(\Omega) \in L^1(\Omega)^*$. 于是有 $y \in L^\infty(\Omega)$, 使得

$$f(x) = \int_\Omega xy \mathrm{d}\mu \qquad (x \in L^1(\Omega)).$$

显然 $L^1(\Omega)$ 在 $S(\Omega)$ 中稠密. 若 $f \neq 0$, 则必 $f \mid L^1(\Omega) \neq 0$, 因而 $\|y\|_\infty > 0$, 于是有 $\varepsilon > 0, A_\varepsilon = \{|y| \geqslant \varepsilon\}$, 使 $\delta \triangleq \mu A_\varepsilon > 0$. 取 $A_n \subset A_\varepsilon$, 使 $\delta/n < \mu A_n < \delta/(n-1)$. 令 $x_n = n(\operatorname{sgn} y)\chi_{A_n}$, 则显然 $x_n \xrightarrow{\mu} 0$. 但

$$f(x_n) = \int_{A_n} n|y| \mathrm{d}\mu \geqslant n\varepsilon\mu A_n > \delta\varepsilon,$$

这与 $f(x_n) \to 0$ 相矛盾. 因此必 $f = 0$. □

F. 空间 $L^p(\Omega)(0<p<1)$

设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 是一测度空间, $0 < p < 1$. 对 Ω 上任何可测函数 $x(t)$, 令

$$\|x\|_p = \int_\Omega |x(t)|^p \mathrm{d}\mu, \tag{13}$$

$$L^p(\Omega) = \{x : \|x\|_p < \infty\}.$$

在应用上,这个空间不及 $p \geqslant 1$ 情况下的空间 $L^p(\Omega)$ 那样重要. 不过,它具有某些特殊的性质,因而是阐释某些 TVS 概念的适当例子.

4.6.6 命题　$L^p(\Omega)$ 依准范数 $\|\cdot\|_p$ 是一个局部有界的 Fréchet 空间(假定其中几乎处处相等的函数不加区别). 若 μ 是 Lebesgue 测度,则 $L^p(\Omega)$ 中不存在凸开的非空真子集,因此 $L^p(\Omega)$ 不是 LCS,更不是可赋范的;若 Y 是一个 LCS,则 $L(L^p(\Omega), Y) = \{0\}$, 特别, $L^p(\Omega)^* = \{0\}$.

证　显然 $\| x \|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, a. e.. 由不等式

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p \qquad (a, b \geqslant 0, 0 < p < 1)$$

推出 $\| \cdot \|_p$ 满足三角不等式. 直接看出 $\| \alpha x \|_p = |\alpha|^p \| x \|_p (\alpha \in \mathbf{K}, x \in L^p(\Omega))$, 由此推出 $\| \cdot \|_p$ 满足 1.4.10 中条件(i)～(iv). 因而 $\| \cdot \|_p$ 是一个准范数. 完备性的证明与 $p \geqslant 1$ 时并无差别. 因此 $L^p(\Omega)$ 是一个 Fréchet 空间.

若令 $B_r = \{x \in L^p(\Omega) : \| x \|_p < r\}$, 则 $\{B_r : r > 0\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 的一个局部基. 由 $B_1 = r^{-1/p} B_r (r > 0)$ 得出 B_1 有界, 故 $L^p(\Omega)$ 是局部有界的.

以下设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, μ 是 Lebesgue 测度. 设 $V \subset L^p(\Omega)$ 是一非空凸开集, 不妨设 $0 \in V$. 取 $r > 0$ 使 $B_r \subset V$. 取定 $x \in L^p$, n 充分大, 使 $\| x \|_p < m^{1-p}$. 作分解 $\Omega = \bigcup_1^n \Omega_i$, 使得

$$\int_{\Omega_i} |x|^p \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n} \| x \|_p < m^{-p} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

令 $x_i = nx\chi_{\Omega_i}$, 则 $\| x_i \|_p = n^{p-1} \| x \|_p < r$, 故 $x_i \in B_r$. 于是

$$x = \frac{1}{n} \sum_i x_i \in V \qquad (\text{用 } V \text{ 凸}),$$

这证得 $V = L^p(\Omega)$.

若 $T \in L(L^p(\Omega), Y)$, 任给 Y 的凸开 0-邻域 W, $T^{-1}W$ 是 $L^p(\Omega)$ 的凸开 0-邻域. 由上面所证, 有 $T^{-1}W = L^p(\Omega)$, 因此 $TL^p(\Omega) \subset W$. 由 W 的任意性推出 $TL^p(\Omega) = \{0\}$. □

第 5 章　Banach 空间

在前几章中对于拓扑空间、度量空间与 TVS 所展开的结论，自然都适用于赋范空间．也有少数仅适用于赋范空间的结果已在第 4 章中顺便给出，且多半是作为某个一般的 TVS 定理的特殊形式出现．但赋范空间毕竟是一类很特殊的抽象空间，范数的存在得以在其中展开丰富的理论．那些真正依赖于一般或特殊赋范结构的深刻结果，正是本章要考虑的对象．考虑的顺序是：一般赋范空间；特殊类型的 Banach 空间；特定的 Banach 空间，主要是函数空间．所考虑的几类特殊 Banach 空间，如自反空间、一致凸空间等，都或多或少带有 Hilbert 空间的某些特征，因而在其讨论中我们总适时地提到 Hilbert 空间这一背景，而为了对所引证的 Hilbert 空间事实提供一个方便的参考，在最后一节中概述了 Hilbert 空间理论的一些基本内容．

在本章中，X,Y 等总记 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间，X,Y,X^* 及 $L(X,Y)$ 中的范数都记作 $\|\cdot\|$；未加说明时，在 X 与 X^* 中总使用范数拓扑；说到 X 或 X^* 中的有界集时，总是指范数有界集．分别用 B_X 与 B_{X^*}（或简写为 B 与 B^*）记 X 与 X^* 中的闭单位球，而以 S_X 与 S_{X^*}（或简写为 S 与 S^*）记相应的单位球面．

§5.1　一般结论

本节在不作进一步假定的条件下展开赋范空间理论，所得的结果既基于 TVS 的一般结论，同时也实质性地用到空间的赋范结构．

A. 对偶空间

沿用 §4.4 中约定的记号 $\hat{x}(f)=f(x)(x\in X, f\in X^*$，参看定义 4.4.1)．定理4.4.2 确立了拓扑同构

$$X_w \to X_w^{**},\qquad x\to\hat{x}.$$

对于赋范空间 X，有如下类似结果：

5.1.1 命题　设 $X^{**}=(X^*)^*$（X 的二次对偶），则

$$e: X\to X^{**},\qquad x\to\hat{x}\tag{1}$$

是一个等距嵌入．

证　任给 $x\in X$，不等式(依 §4.3(2))

$$|\tilde{x}(f)| \leqslant \|f\| \|x\| \qquad (\forall f \in X^*)$$

表明 $\tilde{x} \in X^{**}$ 且 $\|\tilde{x}\| \leqslant \|x\|$. 当 $x=0$ 时显然 $\|\tilde{x}\| = \|x\| = 0$. 若 $x \neq 0$, 则由 4.3.6 有 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1, f(x) = \|x\|$. 于是

$$\|x\| = |\tilde{x}(f)| \leqslant \|\tilde{x}\| \|f\| = \|\tilde{x}\|,$$

因而 $\|\tilde{x}\| = \|x\|$. 这表明赋值映射(1)是一等距嵌入. □

通常称(1)为**正则嵌入**. 通过正则嵌入,每个 $x \in X$ 自然地等同于 $\tilde{x} \in X^{**}$. 在这个意义上,可以认为 $X \subset X^{**}$. 于是, $x \in X$ 兼具双重身份:一方面是 X 中的点,同时又是 X^* 上的有界线性泛函(即 $\tilde{x}$). 这一理解的直接好处是:关于有界线性泛函的某些结果亦可用于向量 x. 一个简单而又很说明问题的例子是,将范数公式 §4.3(1)用到 $\tilde{x}(x \in X)$ 得

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|f\| = 1} |f(x)|. \tag{2}$$

公式(2)如同 §4.3(1)一样是最经常使用的.

与 4.4.2 的一个重大差别是,5.1.1 并未断定映射(1)为同构. 这表明 X 通常并非 X^* 的对偶空间,而只是 X^{**} 的一部分. 因此,在 X 与 X^* 的关系上,通常二者处于不对等地位. 仅当 $X = X^{**}$ 时,关于 X 与 X^* 的结论才是完全互相对偶的. 这种特殊情况将在下节中考虑.

等距嵌入 $X \subset X^{**}$ 存在的一个直接推论是: X 在 X^{**} 中的闭包就是 X 的完备化! X 是完备的 $\Leftrightarrow$ X 是 X^{**} 的闭子空间.

以下两个结果本质上是 Hahn-Banach 定理的推论,而在形式上,则表现为一定线性方程组的可解性.

5.1.2 命题 给定 $\alpha_i \in \mathbf{K}, x_i \in X (i \in I), \rho > 0$, 以下两条件互相等价:

(i) 以下问题有解 $f \in X^*$:

$$f(x_i) = \alpha_i (i \in I), \qquad \|f\| \leqslant \rho; \tag{3}$$

(ii) 对任何有限子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subset I$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \subset \mathbf{K}$, 有

$$\left| \sum_k \alpha_{i_k} \beta_k \right| \leqslant \rho \left\| \sum_k \beta_k x_{i_k} \right\|. \tag{4}$$

证 (i)$\Rightarrow$(ii)是明显的. 下面设条件(ii)满足,证问题(3)可解. 令 $A = \operatorname{span}\{x_i\}$, 对任给 $x = \sum_k \beta_k x_{i_k} \in A$, 定义

$$f\left(\sum_k \beta_k x_{i_k}\right) = \sum_k \alpha_{i_k} \beta_k.$$

由不等式(4)推出,如上定义的 $f(x)$ 与表达式 $x = \sum_k \beta_k x_{i_k}$ 无关,且 $f \in A^*$, $\|f\|_A \leqslant \rho$(参考定理 4.2.2(ii)之证). 显然 $f(x_i) = \alpha_i (i \in I)$, 故 f 在 X 上的保范扩张(依 4.3.3(iv))即是问题(3)的解. □

正因为未必有 $X = X^{**}$, 以上证法并不能用来证明一个完全的对偶命题. 不过,还是可以建立一个减弱了的对偶命题,它就是比 5.1.2 深刻得多的

以下著名定理.

5.1.3 Helly 定理　设 X 完备. 给定 $\alpha_i \in \mathbf{K}, f_i \in X^*(1 \leqslant i \leqslant n), \rho > 0$, 则以下两条件互相等价:

(i) $\forall \varepsilon > 0$, 以下问题有解 $x \in X$:

$$f_i(x) = \alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad \|x\| < \rho + \varepsilon; \tag{5}$$

(ii) 对任给 $\{\beta_i\} \subset \mathbf{K}$, 有

$$\left|\sum_i \alpha_i \beta_i\right| \leqslant \rho \left\|\sum_i \beta_i f_i\right\|. \tag{6}$$

证　如同证 5.1.2 一样,只需证(ii)⇒(i). 设条件(ii)满足,不妨设 $\{f_i\}$ 线性无关. 于是,

$$T: X \to \mathbf{K}^n, \quad x \to (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$$

是一连续的线性满射,因而是开映射(依 4.2.4(i)). 取定 $\varepsilon > 0$, 则 $V \triangleq TB_{\rho+\varepsilon}(0)$ 是 $\mathbf{K}^n$ 的绝对凸开 0-邻域. 若问题(5)无解,则 $(\alpha_i) \overline{\in} V$. 于是由 4.3.4 有 $0 \neq (\beta_i) \in \mathbf{K}^n, r \in \mathbf{R}$, 使得

$$\mathrm{Re}\sum_i \beta_i f_i(x) < r \leqslant \mathrm{Re}\sum_i \alpha_i \beta_i \qquad (x \in B_{\rho+\varepsilon}(0)).$$

如同 4.3.5(ii)之证,从上述不等式推出

$$\left|\sum_i \beta_i f_i(x)\right| \leqslant \left|\sum_i \alpha_i \beta_i\right| \qquad (x \in \bar{B}_{\rho+\varepsilon}(0)).$$

于是

$$\begin{aligned}\left\|\sum_i \beta_i f_i\right\| &= \frac{1}{\rho+\varepsilon} \sup_{\|x\| \leqslant \rho+\varepsilon} \left|\sum_i \beta_i f_i(x)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\rho+\varepsilon}\left|\sum_i \alpha_i \beta_i\right| \leqslant \frac{\rho}{\rho+\varepsilon}\left\|\sum_i \beta_i f_i\right\| \qquad (\text{用}(6)),\end{aligned}$$

而这推出 $\sum \beta_i f_i = 0$, 与 $\{f_i\}$ 线性无解相矛盾. 因此问题(5)必有解. □

5.1.4 定理　设 A 是 Banach 空间 X 的闭子空间,则有自然的等距同构:

$$A^* \to X^*/A^\perp, \quad f|A \to f + A^\perp \qquad (f \in X^*) \tag{7}$$

与

$$(X/A)^* \to A^\perp, \qquad \varphi \to \varphi P, \tag{8}$$

其中 $P: X \to X/A$ 是投影.

证　(i) 记 $\tilde{f} = f + A^\perp$ $(f \in X^*)$. 若 $f, g \in X^*, f|A = g|A$, 则 $f - g \in A^\perp$, 因而 $\tilde{f} = \tilde{g}$. 另一方面,每个 $g \in A^*$ 都可扩张为某个 $f \in X^*$. 因此,(7)给出一个合理的映射,它显然是一个线性满射. 因对任给 $f \in X^*$ 有

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\| &= \inf_{g \in \tilde{f}} \|g\| \\ &= \inf\{\|g\| : g - f \in A^\perp\} \\ &= \|f\|_A = \sup_{\|x\| \leqslant 1, x \in A} |f(x)| \qquad (\text{用 } 4.3.3(\text{iv})),\end{aligned}$$

故(7)为等距同构.

(ii) $\forall \varphi \in (X/A)^*$，显然有 $f \triangleq \varphi P \in X^*$ 且 $f(A)=0$. 这就得到线性映射

$$P^*:(X/A)^* \to A^{\perp}, \qquad \varphi \to \varphi P.$$

$\forall f \in A^{\perp}$，令 $\varphi = fP^{-1}$. 因 $Px = Py \Rightarrow x-y \in A \Rightarrow f(x)=f(y)$，故 φ 是一个单值线性函数. 由 $\varphi^{-1} = Pf^{-1}$ 及 P 为开映射(4.1.18(i))推出 $\varphi \in (X/A)^*$ (用1.3.13(iv))，于是 $f = P^*\varphi$，可见 P^* 是满射. $\forall \varphi \in (X/A)^*$，有

$$\|P^*\varphi\| = \|\varphi P\| \leqslant \|\varphi\| \, \|P\| \leqslant \|\varphi\|,$$

其中用到 $\|P\| \leqslant 1$ (这由§4.1(23)直接得出). 另一方面，

$$\begin{aligned} |\varphi(Px)| &= \inf_{Py=Px} |\varphi(Py)| \\ &\leqslant \|P^*\varphi\| \inf_{Py=Px} \|y\| \\ &= \|P^*\varphi\| \, \|Px\| \qquad (\text{用 §4.1(23)}), \end{aligned}$$

这推出 $\|\varphi\| \leqslant \|P^*\varphi\|$，因此 $\|P^*\varphi\| = \|\varphi\|$，(8)为等距同构得证.

□

看了后面的5.1.10之后，你就知道以上证明中出现的算子 P^*，正是 P 的对偶算子.

B. 弱拓扑

首先对弱收敛给出应用上较方便的刻画.

5.1.5 定理 (i) 设 $\{x_n\} \subset X$ 有界，则 $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow$ 对 X^* 的某个基本集 F，$\forall f \in F$，有 $f(x_n) \to f(x)$；当 $x_n \rightharpoonup x$ 时，有

$$\|x\| \leqslant \varliminf_n \|x_n\|. \tag{9}$$

(ii) 设 $\{f_n\} \subset X^*$ 有界，$f \in X^*$，则 $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow$ 对 X 的某个基本集 B，$\forall x \in B$，有 $f_n(x) \to f(x)$；当 $f_n \xrightarrow{*} f$ 时，有

$$\|f\| \leqslant \varliminf_n \|f_n\|. \tag{10}$$

证 不妨只证结论(ii)(然后用5.1.1得出(i))，且只需证充分性. 可设 $B = X$ (否则以 $\operatorname{span} B$ 代 B). 取定 $x \in X$. $\forall \varepsilon > 0$，取 $y \in B$，使 $\|x-y\| < \varepsilon$. 令 $\beta = \sup_n \|f_n\|$，则

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x-y)| + |f_n(y) - f(y)| + |f(y-x)| \\ &< \varepsilon(\beta + \|f\|) + |f_n(y) - f(y)|, \end{aligned}$$

由此看出 $f_n(x) \to f(x)$. 故得 $f_n \xrightarrow{*} f$. 若 $f_n \xrightarrow{*} f$，则

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \lim_n |f_n(x)| \\ &\leqslant \underline{\lim}_n \|f_n\|\,\|x\| \qquad (\forall x \in X),\end{aligned}$$

由此得出不等式(10). □

以下是 5.1.3 的一个有趣应用.

5.1.6 定理(Goldstine)　B_X 在 $B_{X^{**}}$ 中 $\sigma(X^{**},X^*)$ 稠密.

证　任给 $\varphi \in B_{X^{**}}$ 及 φ 的一个 $\sigma(X^{**},X^*)$ 邻域

$$V = \{\psi \in X^{**} : |\varphi(f_i) - \psi(f_i)| < \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant n)\},$$

其中 $\{f_i\} \subset X^*$, $\varepsilon > 0$, 今要证 $B_X \cap V \neq \varnothing$. 因对任给 $\{\beta_i\} \subset \mathbf{K}$ 有

$$\left|\sum_i \beta_i \varphi(f_i)\right| \leqslant \|\varphi\| \left\|\sum_i \beta_i f_i\right\|,$$

故由 5.1.3 有 $x \in X$, 使得

$$f_i(x) = \varphi(f_i)(1 \leqslant i \leqslant n), \qquad \|x\| < \|\varphi\| + \delta,$$

其中 δ 是充分小的正数. 于是 $y \triangleq (1+\delta)^{-1} x \in B_X$,

$$|f_i(y) - \varphi(f_i)| = \frac{\delta}{1+\delta} |\varphi(f_i)| < \varepsilon \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

这表明 $y \in B_X \cap V$, 如所要证. □

从 5.1.6 直接推出: X 在 X^{**} 中 $\sigma(X^{**},X^*)$ 稠密. 直观上可以说, X 与 X^{**} 其实很接近:每个 $\varphi \in X^{**}$ 都是某个网 $\{x_t\} \subset X$ 的"弱极限".

下面考虑弱拓扑的度量化问题. 如 4.4.11 所提示的,这一问题与可分性有关. 为简便起见,下面令 $B = B_X, B^* = B_{X^*}, S = S_X, S^* = S_{X^*}$. 容易看出: X 可分(弱可分) $\Leftrightarrow$ B 可分(弱可分), X^* 可分(弱*可分) $\Leftrightarrow$ B^* 可分(弱*可分), B 依弱拓扑可度量化 $\Leftrightarrow$ 任何有界集 $A \subset X$ 依弱拓扑可度量化, B^* 依弱*拓扑可度量化 $\Leftrightarrow$ 任何有界集 $F \subset X^*$ 依弱*拓扑可度量化. 以下是关于可分性的一个标准结果.

5.1.7 定理　若 X 可分,则 X^* 弱*可分;若 X^* 可分,则 X 可分.

证　若 X 可分,则由 4.4.12 知 B^* 弱*可分,从而 X^* 弱*可分.

其次设 X^* 可分,则 S^* 有可数稠子集 $\{f_n\}$. 取 $x_n \in S$, 使得 $|f_n(x_n)| > 1/2 (\forall n \in \mathbf{N})$. 令 $A = \{x_n\}$, 今证 $A^\perp = \{0\}$ (从而可用 4.4.5 (vi)推出 A 是 X 的基本集,因而 X 可分). 若 $A^\perp \neq \{0\}$, 则有 $f \in S^* \cap A^\perp$, 于是

$$\begin{aligned}\|f - f_n\| &\geqslant |f(x_n) - f_n(x_n)| \\ &= |f_n(x_n)| > 1/2,\end{aligned}$$

这与 $\{f_n\}$ 在 S^* 上稠密相矛盾. □

取 $X = l^1$ 作例子说明,当 X 可分时 X^* 未必可分(参看 §5.6A).

以下结果可看作是定理 4.4.11 的加强.

5.1.8 定理 (i) 若 X 可分，$A \subset X$ 弱紧，则 A 依弱拓扑可度量化，A 中任何序列有弱收敛子列.

(ii) X 可分 $\Leftrightarrow$ X^* 中的有界集依弱*拓扑可度量化.

(iii) X^* 可分 $\Leftrightarrow$ X 中的有界集依弱拓扑可度量化.

证 (i) 取 X 的可数稠子集 $\{x_n\}$，取 $\{f_n\} \subset S^*$，使 $f_n(x_n) = \|x_n\|$ (用 4.3.6)，则 $F = \{f_n\}$ 分离 X 中的点：若 $x, y \in X$，$z = x - y \in {}^{\perp}F$，则

$$\|x_n\| = f_n(x_n - z) \leqslant \|x_n - z\|.$$

取 $x_{n_k} \to z$ 得出 $z = 0$，故 $x = y$. 于是由 3.3.8(iv)推出 A 依弱拓扑可度量化.

(ii) 若 X 可分，则由 4.4.11(iv)知 X^* 中的有界集依弱*拓扑可度量化. 反之，设 B^* 依弱*拓扑可度量化，则 0 在 B^* 中有可数弱*邻域基 $\{F_n\}$，设 $F_n = B^* \cap A_n^0$，$A_n \subset X$ 是有限集(参考§4.4(9)). 令 $A = \bigcup A_n$，如同 5.1.7 之证，只要证 $A^{\perp} = \{0\}$. 若有 $f \in S^* \cap A^{\perp}$，则

$$A^{\perp} \subset A_n^{\perp} \subset A_n^0 \qquad (\forall n \in \mathbf{N}),$$

因而 $f \in \bigcap F_n = \{0\}$，得出矛盾. 故 $A^{\perp} = \{0\}$，如所要证.

(iii) 若 X^* 可分，则由已证的(ii)知 B 依 $\sigma(X^{**}, X^*)$ 拓扑可度量化，因而依弱拓扑可度量化. 反之，若 B 依弱拓扑可度量化，则类似于(ii)之证，有有限集 $F_n \subset X^*$，$V_n = B \cap {}^0F_n$，使得 $\bigcap V_n = \{0\}$. 令 $F = \bigcup F_n$. 若有 $\varphi \in S_{X^{**}} \cap F^{\perp}$，取 $\{x_t\} \subset B$，使得 $\forall f \in X^*$，有 $f(x_t) \to \varphi(f)$ (用 5.1.6)，则 $\forall f \in F$，有 $f(x_t) \to 0$. 不妨设 $\{V_n\}$ 是一降列，于是有 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots$，使得 $\forall t \geqslant t_n$ 有 $x_t \in V_n$. 这推出 $x_t \to 0$，这与 $\|\varphi\| = 1$ 相矛盾. 故必 $F^{\perp} = \{0\}$，F 是 X^* 的基本集，因而 X^* 可分. □

C. 弱紧性

若 $A \subset X$ 是弱紧的且依弱拓扑可度量化，则 A 亦是序列弱紧的，因而其中每个序列有弱收敛子列. 这样的结论当然极有价值，可惜条件"依弱拓扑可度量化"往往依赖于可分性(见 5.1.8(i))，这就限制了以上结论的应用. 实际上，"可度量化"条件是可以去掉的，这就是以下著名定理的结论.

5.1.9 定理(Eberlein-Smulian 1947) 对于 Banach 空间 X 的子集 A，以下条件互相等价：

(i) A 是相对弱紧的；

(ii) A 是相对弱序列紧的；

(iii) A 是相对弱可数紧的.

若去掉"相对"二字，则以上三条件仍然等价.

注意，若在定理表述中去掉"弱"字，则结论是已知的(可参看定理 3.2.3). 然而，这一个"弱"字的加入，却包含了非同寻常的深刻性，其证明自然

也难些．

证　(i)⇒(ii)．给定序列 $\{x_n\}\subset A$，令 $Y=\overline{\mathrm{span}\{x_n\}}$，则由 A 相对弱紧推出 $Y\cap \overline{A}_w$ 在 Y 中弱紧．注意到 Y 可分，由 5.1.8(i)推出 $\{x_n\}$ 有 $\sigma(Y,Y^*)$ 收敛子列，因而亦有 $\sigma(X,X^*)$ 收敛子列，故 A 是相对弱序列紧的．

(ii)⇒(iii)是平凡的．

(iii)⇒(i)．设 A 相对弱可数紧，今证 A 相对弱紧，这是证明的艰难部分．设 $e:X\to X^{**}$ 是正则嵌入(依 5.1.1)，分别以 A_1 与 A_2 记 A 的 $\sigma(X^{**},X^*)$ 闭包与 $\sigma(X,X^*)$ 闭包．问题在于证 A_1 为 $\sigma(X^{**},X^*)$ 紧且 $e(A_2)=A_1$．由 A 相对弱可数紧推出 A 有界，因而 A_1 在 X^{**} 中有界，于是 $\sigma(X^{**},X^*)$ 紧(用 4.4.7(iii))．其次易见 $e(A_2)\subset A_1$，因此余下只需证 $A_1\subset e(A_2)$，即对任给 $\varphi\in A_1$，有 $x\in A_2$，使 $\varphi=\hat{x}$．下面设 $\varphi\in A_1$ 已取定．

取 $f_1\in S^*$．由 $\varphi\in A_1$ 推出有 $x_1\in A$，使

$$|\varphi(f_1)-f_1(x_1)|<1.$$

令 $Y_2=\mathrm{span}\{\varphi,\varphi-\hat{x}_1\}\subset X^{**}$．取一有限集 $\{\varphi_i\}\subset S_{Y_2}$，使得 $\forall\psi\in S_{Y_2}$，$\exists i$，使 $\|\psi-\varphi_i\|<1/4$．取 $\{f_i\}\subset S^*$，使得 $|\varphi_i(f_i)|>3/4$．于是 $\forall\psi\in S_{Y_2}$，有

$$\max_i|\psi(f_i)|\geqslant\frac{3}{4}-\min_i|(\psi-\varphi_i)(f_i)|\geqslant\frac{1}{2}.$$

将上述的 $\{f_i\}$ 记为 $\{f_2,f_3,\cdots,f_{k_2}\}$，则有

$$\max\{|\psi(f_i)|:2\leqslant i\leqslant k_2\}\geqslant\|\psi\|/2\qquad(\forall\psi\in Y_2).$$

类似地，取 $x_2\in A$，使

$$|\varphi(f_i)-f_i(x_2)|<1/2(1\leqslant i\leqslant k_2),$$

令 $Y_3=\mathrm{span}\{\varphi,\varphi-\hat{x}_1,\varphi-\hat{x}_2\}$，重复上面的论证得出 $f_i\in S^*(k_2<i\leqslant k_3)$，使得

$$\max\{|\psi(f_i)|:k_2<i\leqslant k_3\}\geqslant\|\psi\|/2\qquad(\forall\varphi\in Y_3).$$

如此继续，得到序列 $\{x_n\}\subset A$ 与 $\{f_i\}\subset S^*$，使得

$$|\varphi(f_i)-f_i(x_n)|<1/n\qquad(1\leqslant i\leqslant k_n),\tag{11}$$

$$\max\{|\varphi(f_i)|:k_n<i\leqslant k_{n+1}\}\geqslant\|\psi\|/2\qquad(\forall\psi\in Y_{n+1}),\tag{12}$$

$$Y_{n+1}=\mathrm{span}\{\varphi,\varphi-\hat{x}_1,\cdots,\varphi-\hat{x}_n\}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

因 A 必相对弱聚点紧(用 2.2.9(ii))，故 $\{x_n\}$ 有弱聚点 x，必 $x\in\overline{\mathrm{span}\{x_n\}}$ (用 4.4.4)，因而

$$\varphi-\hat{x}\in\overline{\mathrm{span}}\{\varphi,\varphi-\hat{x}_n:n\in\mathbf{N}\}.\tag{13}$$

由(12)，$\forall\psi\in\mathrm{span}\{\varphi,\varphi-\hat{x}_n:n\in\mathbf{N}\}$，有

$$\sup_i|\psi(f_i)|\geqslant\|\psi\|_2.$$

这结合(13)得出

$$\sup_i |\varphi(f_i)-f_i(x)| \geqslant \|\varphi-\tilde{x}\|/2. \tag{14}$$

当 $1\leqslant i\leqslant k_n$ 时用(11)得

$$|\varphi(f_i)-f_i(x)| < 1/n + |f_i(x-x_n)|.$$

因 x 是 $\{x_n\}$ 的弱聚点，$\forall\varepsilon>0, \forall i\in\mathbf{N}$，必有 $n\in\mathbf{N}$，使得 $k_n\geqslant i$，且 $|f_i(x-x_n)|<\varepsilon$，于是由(14)得 $\|\varphi-\tilde{x}\|\leqslant 2(1/n+\varepsilon)$. 这得出 $\varphi=\tilde{x}\in e(A_2)$，如所要证. □

D. 对偶算子

5.1.10 定义 设 $T\in L(X,Y)$，称线性算子

$$T^*: Y^*\to X^*, g\to g\circ T$$

为 T 的**对偶算子**.

若记 $f(x)=\langle x,f\rangle(x\in X, f\in X^*)$，则 T^* 决定于恒等式

$$\langle Tx,g\rangle=\langle x,T^*g\rangle \qquad (x\in X, g\in Y^*). \tag{15}$$

直接看出 $T^*\in L(Y^*,X^*)$，这就得到映射

$$*: L(X,Y)\to L(Y^*,X^*), \qquad T\to T^*. \tag{16}$$

对偶运算(16)的简单性质汇集于下.

5.1.11 命题 (i) (16)是一个等距的线性映射.

(ii) 若 $T\in L(X,Y)$，则 $T^{**}|X=T$.

(iii) 若 $T\in L(X,Y), S\in L(Y,Z)$，则 $(ST)^*=T^*S^*$.

证 依据基本关系式(15)，大部分结论是平凡的. 下面只证 $\|T^*\|=\|T\|$，这归结于如下计算：

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|g\|\leqslant 1}\|T^*g\| \\ &= \sup_{\|g\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle x,T^*g\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|g\|\leqslant 1}|\langle Tx,g\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \|T\|. \qquad (\text{用}(2))\end{aligned}$$ □

对偶算子的作用颇类似于对偶空间：若 $T\in L(X,Y)$ 与 T^* 之间有某种具对偶特征的联系，那么两者的性质就可能得到相互阐明，这意味着从 T 的某个性质推出 T^* 的特定性质，或从 T^* 的一定性质推出 T 的相应性质. T 与 T^* 的关系具有一定的(但不完全的)对称性. 若 $X=X^{**}$，则 $T^{**}=T$(依 5.1.11(ii))，因而 T 与 T^* 互为对偶，此时它们的相互关系是完全对偶的.

T 与 T^* 的联系首先体现于核 $N(T), N(T^*)$ 与值域 $R(T), R(T^*)$ 四者之间的特殊关系，由此引出的一系列结果在 Banach 空间理论中占有重要地位. 以下一组关系式是最基本的.

5.1.12 命题　对于 $T \in L(X,Y)$，以下等式成立：

$$N(T) = {}^{\perp}R(T^*),\qquad N(T^*) = R(T)^{\perp},\tag{17}$$

$$N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}_{w^*},\qquad {}^{\perp}N(T^*) = \overline{R(T)}.\tag{18}$$

证　$\forall x \in X$，有

$$\begin{aligned} x \in N(T) &\Leftrightarrow \forall g \in Y^*:\langle Tx,g\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall g \in Y^*:\langle x,T^*g\rangle = 0 \quad (\text{用}(15)) \\ &\Leftrightarrow x \in {}^{\perp}R(T^*), \end{aligned}$$

这表明(17)的前一式成立．类似地可证 $N(T^*) = R(T)^{\perp}$．结合(17)与§4.4(14)，(15)得出(18).　□

(17)与(18)这样一组简洁的公式常常用来推出某些重要结论，有着广泛的应用，可立即写出的推论如下．

5.1.13 推论　设 $T \in L(X,Y)$，则 T 是单射 $\Leftrightarrow$ $R(T^*)$ 在 X^* 中弱*稠密，T^* 是单射 $\Leftrightarrow$ $R(T)$ 在 Y 中稠密．

注意若将 $\overline{R(T)}$ 写成 $\overline{R(T)}_w$（用 4.4.4），则(18)中两个等式就接近于对等了．不过两式右端的闭包符号一般都不能除去．这一未尽如人意之处，在一般情况下已无法消除．要得到更令人满意的关系(如 $N(T)^{\perp} = R(T^*)$)，对算子与空间都需附加某些限制．这一类的结果是很丰富的．应用上最有价值的结论涉及 T 为满射或同构、或有闭值域的条件，与之有关的结果是满射定理、同构定理与闭值域定理，三者都在 Banach 空间理论中的重要定理之列.

5.1.14 满射定理　设 X 与 Y 是 Banach 空间，$T \in L(X,Y)$，则以下结论成立：

(i) $R(T) = Y \Leftrightarrow T^*$ 有有界逆；

(ii) $R(T^*) = X^* \Leftrightarrow T$ 有有界逆．

注 5.1.1　T 有有界逆意味着 $T^{-1} \in L(R(T),X)$，容易看出这等价于 $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ $(\forall x \in X)$，c 是某个正常数．与此相区别，通常用"T 可逆"一词表示 $T^{-1} \in L(Y,X)$.

证　(i) 首先设 $R(T) = Y$. 若 T^* 没有有界逆，则 $\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists g_n \in Y^*$，使得 $\|g_n\| = n$，$\|T^*g_n\| \leqslant 1$. 令 $h_n = n^{-1/2}g_n$，则 $\|h_n\| \to \infty$，$\|T^*h_n\| \to 0\ (n \to \infty)$. 结合 $h_n \circ T \to 0$ 与 $R(T) = Y$ 得出 $h_n \xrightarrow{*} 0$，这与 $\|h_n\| \to \infty$ 相矛盾（Y 完备用于此!）. 故 T^* 必有有界逆．

其次设 T^* 有有界逆，要证 $R(T) = Y$. 由开映射定理(4.2.3)之证，只要证

$$\exists \delta > 0,\text{使 } B_\delta(0) \subset \overline{TB_1(0)}.\tag{19}$$

若(19)不成立，则有 $\{y_n\} \subset Y \setminus \overline{TB_1(0)}$，$y_n \to 0\ (n \to \infty)$. 因

$$\overline{TB_1} = {}^0[(TB_1)^0] \qquad (B_1 = B_1(0),\text{用 §4.4(12)}),$$

故有 $g_n \in Y^*$，使得

$$|g_n(Tx)| \leqslant 1 < |g_n(y_n)| \qquad (\forall x \in B_1).$$

这得出 $\|T^* g_n\| \leqslant 1 < \|g_n\| \|y_n\|$，与 T^* 有有界逆相矛盾.

(ii) 若 $R(T^*) = X^*$，则由已证的(i)，T^{**} 有有界逆，因而 $T = T^{**}|X$ 亦有有界逆. 反之，设 T 有有界逆，则 $\forall f \in X^*, g = fT^{-1} \in R(T)^*$. 由扩张定理，不妨设 $g \in Y^*$，因而 $f = g \circ T \in R(T^*)$，故 $R(T^*) = X^*$. □

由 5.1.14 直接推出：

5.1.15 同构定理 设 X 与 Y 是 Banach 空间，$T \in L(X,Y)$，则以下条件互相等价：

(i) $T: X \to Y$ 是拓扑同构；

(ii) $T^*: Y^* \to X^*$ 是拓扑同构；

(iii) T 与 T^* 皆有有界逆；

(iv) T 与 T^* 皆为满射.

5.1.16 闭值域定理 设 X 与 Y 是 Banach 空间，$T \in L(X,Y)$，则以下条件互相等价：

(i) $R(T)$ 是闭集；

(ii) $R(T^*)$ 是闭集；

(iii) $R(T) = {}^\perp N(T^*)$；

(iv) $R(T^*) = N(T)^\perp$.

证 (i)⇒(ii). 设 $R(T)$ 是闭集，以 T_0 记算子 $T: X \to R(T) \triangleq Z$，则 T_0 是开映射，于是 $\exists \beta > 0$，使 $B_Z \subset \beta T_0 B_X$. $\forall g \in Z^*$，有

$$\|T_0^* g\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |g(Tx)| = \sup_{y \in T_0 B_X} |g(y)|$$

$$\geqslant \sup_{\beta y \in B_Z} |g(y)| = \beta^{-1} \|g\|,$$

可见 $T_0^*: Z^* \to X^*$ 有有界逆，因而依 5.1.14 有 $R(T_0^*) = X^*$，故 $R(T^*) = R(T_0^*)$ 是闭集.

(ii)⇒(i). 以 T_0 记算子 $T: X \to \overline{R(T)} \triangleq Z$. 因 $R(T_0)$ 在 Z 中稠密，故 T_0^* 为单射(用 5.1.13). 若 $R(T^*)$ 为闭集，则 $T_0^*: Z^* \to R(T_0^*)$ 是拓扑同构，因而有有界逆. 于是由 5.1.14(i)得 $R(T_0) = Z$，这推出 $R(T)$ 为闭集.

由(18)直接看出(i)⇔(iii)，(iv)⇒ $R(T^*)$ 是弱*闭集⇒(ii). 余下证(ii)⇒(iv). 设 $R(T^*)$ 是闭集，只要证 $N(T)^\perp \subset R(T^*)$. $\forall f \in N(T)^\perp$，定义 $g(Tx) = f(x)$. 若 $y = Tx = Tz$，则 $x - z \in N(T)$，因而 $f(x) = f(z)$. 可见 $g(Tx)$ 仅决定于 $y = Tx$. 这就得到 $R(T)$ 上的线性泛函 $g, f = g \circ T$. 因 $T: X \to R(T)$ 是开映射而 $g^{-1} = T \circ f^{-1}$，故 $g \in R(T)^*$. 由扩张定理，可设

$g \in Y^*$，故 $f = T^* g \in R(T^*)$，如所要证．　□

E. 紧线性算子

5.1.17 定义　若线性算子 $T: X \to Y$ 映有界集为相对紧集，则称它为**紧线性算子**，简称为紧算子．以 $\mathrm{CL}(X,Y)$ 记从 X 到 Y 的紧线性算子之全体，约定 $\mathrm{CL}(X) = \mathrm{CL}(X,X)$.

对于线性算子 $T: X \to Y$，直接看出以下条件互相等价：

(i) $T \in \mathrm{CL}(X,Y)$；

(ii) TB_X 是相对紧集；

(iii) 任给有界序列 $\{x_n\} \subset X$，$\{Tx_n\}$ 有收敛子列．

显然 $\mathrm{CL}(X,Y) \subset L(X,Y)$．当 $T \in L(X,Y)$ 且 $\dim R(T) < \infty$ 时，称 T 为**有限秩算子**，有限秩算子必为紧算子．在很多方面，紧线性算子非常接近于有限维空间中的线性算子，这正是人们对紧线性算子特别感兴趣的原因之一．紧算子特别值得重视的另一个理由是，一些应用上很重要的算子(其中许多是积分算子)恰好是紧算子．

直接从定义 5.1.17 推出：

5.1.18 命题　若 $T \in \mathrm{CL}(X,Y)$，则 $R(T)$ 是可分的．

考虑到一般赋范空间中的紧性判定并不容易，直接依据 5.1.17 来判定紧算子未必方便．因此，关于紧算子在适当运算下保持为紧算子的以下结果特别值得重视．

5.1.19 定理　(i) $\mathrm{CL}(X,Y)$ 是 $L(X,Y)$ 的子空间，当 Y 完备时 $\mathrm{CL}(X,Y)$ 是 $L(X,Y)$ 的闭子空间．

(ii) 若 $T \in L(X,Y)$，$S \in L(Y,Z)$，T 或 S 是紧算子，则 ST 是紧算子．

(iii) 若 $T \in \mathrm{CL}(X,Y)$，则 $T^* \in \mathrm{CL}(Y^*,X^*)$；当 Y 完备时其逆亦真．

综上可以说，紧算子经线性运算、依算子范数收敛的极限运算(若 Y 完备)、乘法运算及取对偶仍得紧算子．

证　(i) 只需证：若 $\{T_n\} \subset \mathrm{CL}(X,Y)$，$T \in L(X,Y)$，$\|T_n - T\| \to 0$，$Y$ 完备，则 TB_X 全有界(参考 3.2.4)．$\forall \varepsilon > 0$，取 $n \in \mathbf{N}$，使

$$\|T_n - T\| < \varepsilon.$$

因 $T_n B_X$ 全有界，故有有限集 $\{y_i\} \subset Y$，使得 $T_n B_X \subset \bigcup B_\varepsilon(y_i)$．于是

$$\begin{aligned} TB_X &\subset T_n B_X + (T - T_n) B_X \\ &\subset \bigcup_i B_\varepsilon(y_i) + B_\varepsilon(0) \subset \bigcup_i B_{2\varepsilon}(y_i), \end{aligned}$$

这正表明 TB_X 全有界，如所要证．

(ii)是平凡的．

(iii) 任给有界序列 $\{g_n\} \subset Y^*$，今证 $\{T^* g_n\}$ 有收敛子列．因 $Z \triangleq \overline{TB_X}$

是紧集，由 Arzela-Ascoli 定理(参考 5.6.2)，$\{g_n\}$ 在 Z 上有一致收敛子列，不妨设就是 $\{g_n\}$ 本身．于是由

$$\| T^*(g_m - g_n) \| = \sup_{z\in Z} | g_m(z) - g_n(z) |$$

推出 $\{T^* g_n\}$ 收敛．

若 Y 完备，T^* 是紧算子，则 T^{**} 是紧算子，于是 TB_X 在 Y^{**} 中相对紧. 而 Y 在 Y^{**} 中是闭的，故 TB_X 在 Y 中相对紧，因而 T 为紧算子． □

5.1.20 引理 设 X 是 Banach 空间，$T\in \mathrm{CL}(X)$，$T_\lambda = \lambda I - T$，$0\neq\lambda\in$ **K**，则 T_λ 与 T_λ^* 有闭值域．

证 由 5.1.16，只需证 $R(T_\lambda)$ 是闭的．令 $N = N(T_\lambda)$，易见 $B_N = \lambda^{-1} TB_X$，于是由 T 紧推出 B_N 为紧集，因而 $\dim N < \infty$ (参看定理 4.1.17). 于是由 4.3.10 有闭子空间 $M\subset X$，使得 $X = N\oplus M$. 令 $U = T_\lambda | M$，直接看出 U 是单射，$R(U) = R(T_\lambda)$，只要证 U 有有界逆．用反证法：设存在 $\{x_n\}\subset S_M$，使得 $Ux_n\to 0$. 因 T 为紧算子，故不妨设 $Tx_n\to x_0$，从而 $\lambda x_n\to x_0$，这推出 $x_0\in M$. 但因此有 $Ux_0 = \lambda \lim\limits_n Ux_n = 0$，从而 $x_0 = 0$，这与 $|\lambda| = \|\lambda x_n\| \to \|x_0\|$ 相矛盾． □

5.1.21 Riesz 引理 设 A 是 X 的真闭子空间，$0<r<1$，则存在 $x\in X$，使得 $\|x\| = 1$，$d(x,A) > r$.

证 取定 $y\in X\backslash A$，则 $\rho\triangleq d(y,A) > 0$. 取 $a\in A$，使得 $\|y-a\| < \rho/r$. 令 $x = (y-a)/\|y-a\|$，则 $\|x\| = 1$，

$$d(x,A) = d\left(\frac{y-a}{\|y-a\|}, A\right) = \frac{d(y-a,A)}{\|y-a\|}$$

$$= \frac{d(y,A)}{\|y-a\|} > \rho\cdot\frac{r}{\rho} = r.$$ □

设 X 是复 Banach 空间，$T\in L(X)$，$T_\lambda = \lambda I - T$，称

$$\sigma(T) = \{\lambda\in \mathbf{C}: T_\lambda \text{ 不是 } X \text{ 到自身的同构}\} \tag{20}$$

为 T 的**谱**，而 $\lambda\in\sigma(T)$ 称为**谱值**．若 $N(T_\lambda)\neq\{0\}$，则称 λ 为 T 的**特征值**，称 $N(T_\lambda)$ 中的**非零**向量为 T 属于 λ 的**特征向量**．特征向量显然是谱值，但在无限维空间中，谱值未必是特征值．

作了上述准备之后，现在已可建立关于紧算子的以下基本定理．

5.1.22 定理 设 X 是复 Banach 空间，$T\in \mathrm{CL}(X)$，则 $\sigma(T)$ 是无非零聚点的可数集；若 $0\neq\lambda\in\sigma(T)$，则 λ 是 T 的特征值且 $\dim N(T_\lambda) < \infty$.

证 (i) 设 $0\neq\lambda\in\sigma(T)$，证 λ 是特征值，这是定理证明的核心部分．不妨设 $\lambda = 1$ (否则以 $\lambda^{-1}T$ 取代 T)．用反证法：设 $N(T_1) = 0$，因 $R(T_1)$ 是闭子空间(用引理 5.1.20)，故 $T_1: X\to R(T_1)$ 为拓扑同构(用 4.2.4(ii))，因而 $R(T_1^*) = X^*$ (用 5.1.14)．若能证 $N(T_1^*) = \{0\}$，则必 $R(T_1) = X$ (用

5.1.13)，这就与 $1 \in \sigma(T)$ 矛盾．为证 $N(T_1^*) = \{0\}$，仍用反证法：设 $N(T_1^*) \neq \{0\}$，这与 $R(T_1^*) = X^*$ 一起推出：存在 $0 \neq \varphi \in N(T_1^*)$ 与 $\varphi_n \in X^*$，使得

$$\varphi = T_1^* \varphi_1 = (T_1^*)^2 \varphi_2 = \cdots = (T_1^*)^n \varphi_n = \cdots,$$

这就得出 $\varphi_n \in N_{n+1} \backslash N_n, N_n = N((T_1^*)^n)$. 由引理 5.1.21，有 $\psi_n \in N_n$，使得 $\|\psi_n\| = 1, d(\psi_n, N_{n-1}) \geqslant 1/2 (n \geqslant 2)$. 若 $n > m$，则

$$(T_1^*)^{n-1}(T_1^* \psi_n + T^* \psi_m) = (T_1^*)^n \psi_n + T^*(T_1^*)^{n-1} \psi_m = 0,$$

故 $T_1^* \psi_n + T^* \psi_m \in N_{n-1}$. 于是

$$\| T^* \psi_n - T^* \psi_m \| = \| \psi_n - (T_1^* \psi_n + T^* \psi_m) \| \geqslant 1/2,$$

因而 $\{T^* \psi_n\}$ 不能含收敛子列，但这与 T^* 为紧算子(用 5.1.19)相矛盾．因此 $N(T_1^*) = \{0\}$，如所要证．

(ii) 证 $\sigma(T)$ 无非零聚点．设 $\{\lambda_n\} \subset \sigma(T)$ 是一收敛序列，可设 λ_n 互不相同且 $\lambda_n \neq 0 (\forall n \in \mathbf{N})$. 令 $T_n = \lambda_n I - T$，取 $0 \neq x_n \in N(T_n)$，如在线性代数中一样可说明 $\{x_n\}$ 线性无关．令 $X_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则由引理 5.1.21 有 $y_n \in X_n$，使得 $\| y_n \| = 1, d(y_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2 (n \geqslant 2)$. 若 $n > m$，则容易验证 $T_n y_n + T y_m \in X_{n-1}$，于是

$$\begin{aligned} \| T y_n - T y_m \| &= \| \lambda_n y_n - (T_n y_n + T y_m) \| \\ &= | \lambda_n | \, \| y_n - \lambda_n^{-1} (T_n y_n + T y_m) \| \\ &\geqslant | \lambda_n | \, | d(y_n, X_{n-1}) | \geqslant | \lambda_n | /2. \end{aligned}$$

因 $\{T y_n\}$ 应含收敛子列，故必 $\lambda_n \to 0$.

(iii) 由 $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda \in \sigma(T) : 1/n \leqslant |\lambda| \leqslant n\} \right)$ 看出 $\sigma(T)$ 必为可数集．

最后，若 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$，则在 5.1.20 之证中已指出 $\dim N(T_\lambda) < \infty$，故定理得证． □

§5.2　自反空间

在 §5.1 中，我们不依赖于任何特殊假设，展开了赋范空间的理论．如果继续保持如此一般的框架，固然还可以走下去，但势必越来越举步艰难，所获有限．新的推动来自新的假设的加入．从本节起，我们要依次考虑几类特殊的赋范空间，它们比一般赋范空间更接近于 Hilbert 空间或 Euclid 空间．我们首先关注的是这样的空间：它的单位球的拓扑或几何性质更接近于 Hilbert 空间中的单位球，自反空间就是这种类型的空间．

本节中设 X 是给定的 Banach 空间．

A. 自反性的刻画

5.2.1 定义 若正则嵌入 $X \to X^{**}$（依§5.1(1)）为同构，则称 X 为自反 Banach 空间，简称为**自反空间**.

注意 X^{**} 总是完备的，因此在定义 5.2.1 中并不需要预设 X 完备. 但应指出，仅仅假定 X 与 X^{**} 等距同构尚不足以保证 X 为自反空间.

当 X 是自反空间时，通常就写作 $X = X^{**}$，此时，X 与 X^{*} 互为对偶空间，因而两者的关系具有完全的对等性. 这样，每个关于 X 的命题自动引出一个关于 X^{*} 的对偶命题，反之亦然. 因此，对偶理论用于自反空间可收到最佳效果.

如我们所预期的，自反性可刻画为单位球的一定拓扑特性. 如同§5.1一样，总用 B_X 或 B 表示 X 中的闭单位球.

5.2.2 定理 对于 Banach 空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是自反的；

(ii) B_X 是弱紧的；

(iii) X 中任何有界序列有弱收敛子列；

(iv) X 中的有界集为相对弱紧集.

证 (i)⇔(ii). 若 X 是自反的，则依 Banach-Alaoglu 定理(参考 4.4.7(iii)) B_X 作为 X^{**} 中的闭单位球是 $\sigma(X^{**}, X^{*})$ 紧的，因而是弱紧的. 反之，若 B_X 弱紧，则 B_X 在 $B_{X^{**}}$ 中 $\sigma(X^{**}, X^{*})$ 闭. 另一方面，B_X 在 $B_{X^{**}}$ 中 $\sigma(X^{**}, X^{*})$ 稠密(依 5.1.6)，因此在正则嵌入下有 $B_X = B_{X^{**}}$，这显然推出 $X = X^{**}$.

(ii)⇒(iii). 若 B_X 弱紧，则亦弱序列紧(依 5.1.9)，因而其中的序列有弱收敛子列，这显然推出 X 中任何有界序列有弱收敛子列.

(iii)⇒(iv). 由(iii)显然推出：X 中的有界集是相对弱序列紧的，因而依 5.1.9 亦是相对弱紧的.

注意到 B_X 是弱闭的(4.4.5(iii))，显然(iv)⇒(ii). □

在自反空间的应用中，5.2.2 中的条件(iii)或许是最重要的. 它表明在弱收敛的意义上，使用自反空间就如同使用有限维空间一样！"有界序列必有收敛子列"这一结论，在有限维问题中起多大作用，是众所周知的；而"有界序列必有弱收敛子列"，则在自反空间的应用中能起同样大的作用.

下面考虑与给定自反空间有关联的空间的自反性，所得结论对于自反性的判定是重要的.

5.2.3 定理 (i) 若 X 是自反的，则 X 的任何闭子空间是自反的.

(ii) 若 X 是 Banach 空间，则 X 是自反的 ⇔ X^{*} 是自反的.

(iii) 有限个自反空间的积空间是自反的.

(iv) 若 X 是自反空间, Y 是与 X 拓扑同构的 Banach 空间, 则 Y 亦是自反的. 因此"自反性"是一种拓扑性质, 与范数的选择无关.

(v) 若 X 是自反空间, $A \subset X$ 是闭子空间, 则商空间 X/A 是自反空间.

证 (i) 设 A 是 X 的闭子空间, 则 B_A 作为 B_X 的弱闭子集是弱紧的, 因而也是 $\sigma(A, A^*)$ 紧的, 这推出 A 是自反的.

(ii) 若 X 是自反的, 则 X^* 中的弱*拓扑就是 $\sigma(X^*, X^{**})$ 拓扑, 于是 B_{X^*} 是 $\sigma(X^*, X^{**})$ 紧的(用 4.4.7), 这表明 X^* 是自反的. 反之, 若 X^* 是自反的, 则由已证结论推出 X^{**} 是自反的, 因而其闭子空间 X 是自反的.

(iii) 是明显的.

(iv) 若 $T: X \to Y$ 是拓扑同构, 则 $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ 亦为拓扑同构(用 5.1.15), 于是

$$Y^{**} = T^{**}X^{**} = TX = Y$$

(用 5.1.11(ii)), 可见 Y 是自反的.

(v) 由 §4.4(14)有 $A = {}^{\perp}(A^{\perp})$, 于是由 §5.1(7)有

$$X/A \cong X^{**}/{}^{\perp}(A^{\perp}) \cong (A^{\perp})^*.$$

因 $A^{\perp}$ 作为 X^* 的闭子空间是自反的(用已证的(i)(ii)), 故 $(A^{\perp})^*$ 是自反的, 于是由已证的(iv)推出所要结论. □

当 X 自反时, X^* 中的弱*拓扑重合于弱拓扑. 因此, 处理自反空间问题时不必提到"弱*概念".

B. 某些推论

" X 是自反空间"这一条件, 可用来得出许多很强的结论. 下面几个例子虽然简单, 但颇说明问题.

5.2.4 命题 设 X 是自反空间, 则 X 可分 $\Leftrightarrow X^*$ 可分, 当 X 可分时 X 与 X^* 皆弱可分.

证 已知 X^* 可分 $\Rightarrow X$ 可分(5.1.7), 若 X 可分, 则 X^{**} 可分, 因而 X^* 可分. 余下的结论由 5.1.7 推出. □

注意 5.2.4 正好消除了定理 5.1.7 中 X 与 X^* 的不对等性. 一般说来, 任何使 X 与 X^* 不对等的 Banach 空间定理, 只要用于自反空间, 就可消除不对等性. 由此可见, 在自反空间的范围内, 对偶空间概念的运用可收到最佳效果.

5.2.4 可用来得出以下结论: 凡使 X^* 不可分的可分空间 X 都不是自反空间, 例如, 空间 l^1 就是如此, 因 $(l^1)^* = l^\infty$ 显然是不可分的. 一般地, 使自反性的任何一条推论不成立的空间都不是自反空间, 这是排除自反性的主要

方法之一.

5.2.5 命题 自反空间是序列弱完备的.

证 由对偶性,只需证:若 X 是 Banach 空间,则 X^* 是序列弱*完备的. 而这是 4.4.10(iv)的直接推论. □

5.2.6 定理 设 $T \in L(X,Y)$.

(i) 若 X 是自反空间,则 T 是紧算子的充要条件是

$$x_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow Tx_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{1}$$

(ii) 若 Y 是自反空间,则 T 是紧算子的充要条件是

$$g_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow T^* g_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

证 因当 Y 完备时 T 是紧算子 $\Leftrightarrow T^*$ 是紧算子(依 5.1.19),故只需证(i). 首先设 T 是紧算子, $x_n \rightharpoonup 0$, 直接看出 $Tx_n \rightharpoonup 0$. 因 $\{x_n\}$ 必有界,故 $\{Tx_n\}$ 有收敛子列 $\{Tx_{n_k}\}$. 这结合 $Tx_{n_k} \rightharpoonup 0$ 得出 $Tx_{n_k} \to 0$. 将此结论用到 $\{x_n\}$ 的任何子列得出 $Tx_n \to 0$, 因此条件(1)满足. 反之,设条件(1)满足,任给有界序列 $\{x_n\} \subset X$, 取其子列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightharpoonup x$, 则 $Tx_{n_k} \to Tx$, 这表明 T 是紧算子. □

5.2.7 定理 设 X 是自反空间, $D \subset X$ 是一有界闭凸集 $f: D \to \mathbf{R}$ 依 D 上的弱拓扑下半连续,即

$$x_n \rightharpoonup x (x_n, x \in D) \Rightarrow f(x) \leqslant \varliminf_n f(x_n), \tag{3}$$

则 $f(x)$ 在 D 上取得最小值.

证 设 $\alpha = \inf\limits_{x \in D} f(x)$. 取序列 $\{x_n\} \subset D$, 使 $f(x_n) \to \alpha (n \to \infty)$. 因 X 自反而 D 为有界弱闭集(用 4.4.5(iii)),故不妨设 $x_n \rightharpoonup x \in D$, 于是由条件(3)有

$$\alpha \leqslant f(x) \leqslant \varliminf_n f(x_n) = \alpha,$$

这表明 $f(x) = \alpha$ 是 f 在 D 上的最小值. □

今用 5.2.7 来解决如下最佳逼近问题:设 $A \subset X, x_0 \in X$, 求 $a \in A$ 使得

$$\| x_0 - a \| = d(x_0, A). \tag{4}$$

如上的 a 称为 x_0 在 A 中的**最佳逼近**. 若 X 是自反空间, A 是非空闭凸集,则 x_0 在 A 中的最佳逼近必存在. 事实上,取 r 充分大,则 $D = A \cap \bar{B}_r(0)$ 是有界闭凸集,而 $f(x) = \| x_0 - x \|$ 满足条件(3)(用§5.1(9)),于是由 5.2.7 知有 $a \in D$, 使 $f(a)$ 为 $f(x)$ 在 D 上的最小值. 若 $x \in A \backslash D$, 则

$$\| x - x_0 \| \geqslant r - \| x_0 \| > d(x_0, A),$$

故 a 就是 x_0 在 A 中的最佳逼近. 这就得到如下定理.

5.2.8 定理 设 A 是自反空间 X 中的非空闭凸集,则每个 $x \in X$ 在 A 中

有最佳逼近．

§5.3　严格凸与一致凸空间

直观上，Euclid 空间中单位球具有完美的凸性．本节要指明，若 B_X 具有类似于 Euclid 空间中单位球的某种凸性，则空间 X 的性质更接近于平常的空间．

在本节中，假设 X 是实赋范空间，约定 $B=B_X, B^*=B_{X^*}, S=S_X, S^*=S_{X^*}, t'=1-t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$.

A. 严格凸空间

5.3.1 定义　若赋范空间 X 满足条件

(SC) $\forall x,y\in S, x\neq y, 0<t<1 \Rightarrow \|t'x+ty\|<1$,

则称 X 为**严格凸空间**(缩写作 SCS).

直观上，条件(SC)意味着：端点在 S 上的线段之内点必在 B 之内部．显然，这正是通常的球所具有的性质．

现在给出严格凸性的多种不同形式的刻画．

5.3.2 命题　对于赋范空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是严格凸的；

(ii) 若 $0\neq f\in X^*$，则至多有一点 $x\in S$ 使得 $f(x)=\|f\|$（即超平面 $f=\|f\|$ 与 S 至多切于一点）；

(iii) $\forall x,y\in S, x\neq y\Rightarrow \|x+y\|<2$;

(iv) 若 $0\neq x,y\in X, x\neq y, \|x+y\|=\|x\|+\|y\|$，则 $y=\beta x$, $\beta>0$.

证　(i)⇒(ii). 设 X 是严格凸的．若 $x,y\in S, f(x)=f(y)=\|f\|$, $t\in(0,1)$，则

$$\|f\|=f(t'x+ty)\leqslant\|f\|\,\|t'x+ty\|,$$

这推出 $\|t'x+ty\|=1$，因而 $x=y$.

(ii)⇒(iii). 若 $x,y\in S, \|x+y\|=2$，则由 4.3.6 有 $f\in X^*$，使得 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=1=\|f\|$．于是

$$2=f(x)+f(y)\leqslant\|f\|(\|x\|+\|y\|)=2,$$

这推出 $f(x)=f(y)=\|f\|$，因而由条件(ii)推出 $x=y$.

(iii)⇒(iv). 设条件(iii)满足，x,y 如条件(iv)，令 $x'=x/\|x\|, y'=y/\|y\|$，则

$$\begin{aligned}2 &\geqslant \|x'+y'\| \\ &\geqslant \|x'+\|x\|^{-1}y\| - \|\,\|x\|^{-1}y-y'\| \\ &= \|x\|^{-1}\|x+y\| - \|x\|^{-1}(\|y\|-\|x\|) = 2,\end{aligned}$$

这得出 $\|x'+y'\| = 2$. 因此 $x'=y'$，故得 $y=\beta x$，$\beta = \|y\|/\|x\|$.

(iv)⇒(i). 若 $x,y\in S$，$0<t<1$ 使得

$$\|t'x+ty\| = 1 = \|t'x\| + \|ty\|,$$

则由条件(iv)有 $ty=\beta t'x$，$\beta>0$，这推出 $y=x$. □

注 5.3.1 若 X 不是严格凸的，则有 $x,y\in S$，$x\neq y$，$\tau\in(0,1)$，使得 $z\triangleq\tau'x+\tau y\in S$. 今指明 $[x,y]\subset S$，否则有 $t\in(0,1)$，$u=t'x+ty$，使 $\|u\|<1$，不妨设 $0<t<\tau$. 取 $s\in(0,1)$，使 $z=s'u+sy$，则

$$\|z\|\leqslant s'\|u\|+s\|y\|<1,$$

得出矛盾. 这就得出如下**两择一**结论：$\forall x,y\in S$，$x\neq y$，以下两种情况恰有一种出现：

(i) 线段 $[x,y]$ 的内点都不在 S 上，当 X 为严格凸时就是如此；

(ii) $[x,y]$ 整个地位于 S 上.

注 5.3.2 若 $0\neq x\in X$，则由 4.3.6 有 $f\in S^*$，使 $f(x)=\|x\|$，这表明 $\hat{x}(\in X^{**})$ 在 S^* 上总取得最大值 $\|x\|$，但仅当 X^* 严格凸时 $\hat{x}$ 在唯一点 $f\in S^*$ 取得最大值(用 5.3.2(ii)). 另一方面，即使 X 严格凸，$0\neq f\in X^*$，f 在 S 上亦未必达到最大值.

5.3.2(ii)可看作一个唯一性条件：若 f 在 S 上有最大值点，则必是唯一的. 这就毫不足怪，在应用中，严格凸性常常用来得出某个唯一性结论. 以下是两个典型例子.

5.3.3 定理 设 X 是严格凸空间，$A\subset X$ 是凸集，$x\in X$，则至多存在一个 $a\in A$，使得

$$\|x-a\| = d(x,A). \tag{1}$$

因此，严格凸性保证了在凸集中的最佳逼近的唯一性. 至于存在性，则通常依赖于一定的紧性或完备性条件.

证 设 $\|x-a\|=\|x-b\|=d(x,A)$，$a,b\in A$，则

$$\begin{aligned}\|x-a\|+\|x-b\| &\geqslant \|2x-a-b\| \\ &= 2\|x-(a+b)/2\| \\ &\geqslant 2d(x,A),\end{aligned}$$

这推出

$$\|x-a\|+\|x-b\| = \|(x-a)+(x-b)\|,$$

于是由命题 5.3.2(iv)有 $\beta>0$，使 $x-b=\beta(x-a)$，从而 $a=b$. □

5.3.4 定理(Taylor) 若 X^* 严格凸，A 是 X 的子空间，$f\in A^*$，则 f 在

X 上有唯一保范扩张(参考 4.3.3(iv)),当 X 是自反空间时其逆亦真.

证 (i) 设 $g,h \in X^*$ 是 f 的两个保范扩张,不妨设 $g,h \in S^*$. 令 $g_t = t'g + th(0 < t < 1)$,则 $g_t \in X^*$ 亦是 f 的扩张. 因而 $\|g_t\| \geqslant 1$. 于是由 X^* 严格凸推出 $g = h$.

(ii) 设 X 是自反空间,X 的子空间上的有界线性泛函有唯一保范扩张. 若 $0 \neq x \in X$,则满足 $f(x) = \|x\|$ 的 $f \in S^*$ 必是唯一的(参考 4.3.6 之证明),于是由 5.3.2(ii)知 X^* 严格凸. □

若 X 是 Hilbert 空间,$A \subset X$ 是一子空间,$f \in A^*$,则由 Riesz 表示定理(5.8.6)知有唯一 $a \in A$,使

$$f(x) = \langle x,a \rangle \qquad (\forall x \in A).$$

令 $g(x) = \langle x,a \rangle (x \in X)$,则 g 是 f 在 X 上的唯一保范扩张. 5.3.4 表明,当 X^* 严格凸时,X 继承了 Hilbert 空间的上述性质.

以下结果表明,在某种意义上严格凸空间具有一定普遍性.

5.3.5 定理(Clarkson)　若 X 是可分赋范空间,则 X 必拓扑同构于一个严格凸空间.

证 因 X 可等距嵌入 $C(J)$ ①, $J = [0,1]$,故不妨设 $X = C(J)$. 取可数稠集 $\{t_n\} \subset J$,定义

$$\|x\| = \left[\|x\|_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} |x(t_n)|^2\right]^{1/2} \qquad (x \in X).$$

直接看出 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数,且

$$\|x\|_0 \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{2}\|x\|_0 \qquad (x \in X),$$

故 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_0$ 等价. 今证 $(X,\|\cdot\|)$ 严格凸. 设 $0 \neq x,y \in X$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$,则

$$\left[(\|x\|_0 + \|y\|_0)^2 + \sum_n 4^{-n} |x(t_n) + y(t_n)|^2\right]^{1/2}$$
$$= \|x\| + \|y\|.$$

于是由 l^2 的严格凸性推出存在 $\beta > 0$,使 $y(t_n) = \beta x(t_n)(\forall n \in \mathbf{N})$,这推出 $y = \beta x$,因此 $(X,\|\cdot\|)$ 严格凸. □

B. 局部一致凸空间

5.3.6 定义　若赋范空间 X 满足条件:

(LUC) $\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in S$,有

$$\|x+y\| > 2(1-\delta) \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon,$$

---

① $C(J)$ 是可分赋范空间的万有空间(参考[12,p.224]).

则称 X 为**局部一致凸空间**(缩写作 LUCS).

条件(LUC)可缩写成:

$$\lim_{y\in S,\ \|x+y\|\to 2}\|x-y\|=0\qquad(\forall x\in S),\tag{2}$$

或表成序列极限的形式:

$$\lim_{\|x_n\|=1,\ \|x_n+x\|\to 2}x_n=x\qquad(\forall x\in S).\tag{2}'$$

若 X 不是严格凸的,则如前面已指出的,S 包含一线段 $[x,y]$,$x\neq y$. 若令 $x_n=y(\forall n\in\mathbf{N})$,则 $\|x_n+x\|=2$,而 $x_n\not\to x$,可见 X 不是局部一致凸空间. 因此,局部一致凸空间必为严格凸空间. 在下段中,我们将说明 Hilbert 空间是一致凸空间,更是局部一致凸空间. 可以说,局部一致凸空间介于 Hilbert 空间与严格凸空间之间.

若 X 是 Hilbert 空间,$x_n,x\in X(\forall n\in\mathbf{N})$,则由

$$\|x_n-x\|^2=\|x_n\|^2-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\|x\|^2$$

看出 $x_n\to x\Leftrightarrow\|x_n\|\to\|x\|$ 且 $x_n\rightharpoonup x$. 极有意义的是,这一性质为局部一致凸空间所继承.

5.3.7 定理 (i) 设 X 是局部一致凸的,$x,x_n\in X(n\in\mathbf{N})$,则 $x_n\to x\Leftrightarrow\|x_n\|\to\|x\|$ 且 $x_n\rightharpoonup x\ (n\to\infty)$.

(ii) 设 X^* 是局部一致凸的,$f,f_n\in X^*(n\in\mathbf{N})$,则 $f_n\to f\Leftrightarrow\|f_n\|\to\|f\|$ 且 $f_n\overset{*}{\rightharpoonup}f\ (n\to\infty)$.

证 容易看出(ii)蕴涵(i),故只需证(ii),且只需证充分性. 设 $\|f_n\|\to\|f\|$ 且 $f_n\overset{*}{\rightharpoonup}f$. 显然可设 $f\neq0$,进而又可设 $f,f_n\in S^*$,否则可分别用 $f'=f/\|f\|$ 与 $f'_n=f_n/\|f_n\|$ 取代 f 与 f_n. 由局部一致凸条件,只要证 $\|f_n+f\|\to2$. 显然

$$\overline{\lim_n}\|f_n+f\|\leqslant2.$$

另一方面,由 $f_n+f\overset{*}{\rightharpoonup}2f$ 并用 § 5.1(10)得

$$2=\|2f\|\leqslant\underline{\lim_n}\|f_n+f\|,$$

故得所要证. □

对于某些局部一致凸空间(如 L^p 空间),5.3.7 的结果可用来明显简化范数收敛性判定. 另一方面,亦可从否定的方面利用 5.3.7,以下就是一简单例子. 设 c 是收敛数列空间,

$$x_n=(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n\text{个}},0,\cdots),\qquad x=(1,1,\cdots,1,\cdots).$$

利用 $c^*=l^1$ 易验证 $x_n\rightharpoonup x$,而 $\|x_n\|=\|x\|=1=\|x_n-x\|$,这使

5.3.7(i)不能成立．因此 c 不可能是局部一致凸空间．

局部一致凸空间未必为自反空间．但有以下可庆幸的结果：

5.3.8 定理　若 X 是自反空间，则可在 X 上改赋等价范数，使 X 与 X^* 同时成为局部一致凸空间．

C. 一致凸空间

5.3.9 定义　若赋范空间 X 满足条件：

(UC) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in S$:

$$\|x+y\| > 2(1-\delta) \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon,$$

则称 X 为**一致凸空间**(缩写为 UCS)．若 X 满足条件：

(US) $\forall \varepsilon, \eta > 0, \varepsilon < \eta, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X$，有

$$\begin{cases} \varepsilon < \|x\|, \|y\| < \eta, \|x-y\| < \delta \\ \Rightarrow \|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \varepsilon\|x-y\|, \end{cases}$$

则称 X 为**一致光滑空间**(缩写为 USS)

一致凸空间概念是 Clarkson 于 1936 年引进的．类似于(2)，可将条件(UC)表成如下极限形式：

$$\lim_{x_n, y_n \in S, \|x_n+y_n\| \to 2} \|x_n - y_n\| = 0. \tag{3}$$

显然(UC)⇒(LUC)．另一方面，若 X 是 Hilbert 空间，$x_n, y_n \in S$，则由中线公式(参看 §5.8(1))有

$$\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 = 4,$$

由此显然推出(3)．可见 Hilbert 空间是一致凸空间．下面将证明一致凸空间是自反空间．因此可以说，一致凸空间是介于 Hilbert 空间与自反空间之间的一类空间．

条件(US)的直观意义不及(UC)那样明显．不过，以下结果充分说明了一致光滑空间的意义．

5.3.10 定理　X 是一致凸空间 $\Leftrightarrow X^*$ 是一致光滑的，X 是一致光滑的 $\Leftrightarrow X^*$ 是一致凸空间．

证　(i) 设 X 是 UCS，而 X^* 非 USS，则有 $0 < \varepsilon < \eta, f_n, g_n \in X^*$，使得 $\varepsilon < \|f_n\|, \|g_n\| < \eta, \delta_n \triangleq \|f_n - g_n\| \to 0$，但

$$\|f_n\| + \|g_n\| > \|f_n + g_n\| + \varepsilon\delta_n \qquad (n \in \mathbf{N}). \tag{4}$$

取 $x_n, y_n \in S$，使得

$$f_n(x_n) > \|f_n\| - \varepsilon\delta_n/8, \qquad g_n(x_n) > \|g_n\| - \varepsilon\delta_n/8 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

则

$$\|f_n\| + \|g_n\| < f_n(x_n) + g_n(y_n) + \varepsilon\delta_n/4$$

$$=(f_n+g_n)\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)+(f_n-g_n)\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)+\frac{\varepsilon\delta_n}{4}$$

$$\leqslant\|f_n+g_n\|+2^{-1}\delta_n\|x_n-y_n\|+\varepsilon\delta_n/4,\tag{5}$$

这结合(4)得 $\|x_n-y_n\|>3\varepsilon/2(\forall n\in\mathbf{N})$. 由 X 为 UCS,有 $\sigma>0$, 使得 $\|x_n+y_n\|\leqslant 2(1-\sigma)$. 由

$$\|f_n+g_n\|+\|f_n-g_n\|\geqslant 2\|f_n\|>2\varepsilon$$

得 $\|f_n+g_n\|>2\varepsilon-\delta_n$. 于是由(5)有

$$\begin{aligned}\|f_n\|+\|g_n\|&\leqslant(1-\sigma)\|f_n+g_n\|+\delta_n(1+\varepsilon/4)\\&\leqslant\|f_n+g_n\|-\sigma(2\varepsilon-\delta_n)+\delta_n(1+\varepsilon/4)\\&=\|f_n+g_n\|-2\varepsilon\sigma+\delta_n(\sigma+1+\varepsilon/4)\\&<\|f_n+g_n\|-\varepsilon\sigma\qquad(n\text{ 充分大时}),\end{aligned}$$

这显然不可能. 这就证得 X 为 UCS $\Rightarrow X^*$ 为 USS.

(ii) 设 X 为 USS,而 X^* 非 UCS,则有 $\varepsilon>0, f_n, g_n\in S^*$, 使得 $\|f_n-g_n\|\geqslant\varepsilon$, $\|f_n+g_n\|\to 2$, 不妨设 $\|f_n+g_n\|\geqslant 2(1-\varepsilon/n)$. 取 x_n, $y_n\in S$, 使得

$$(f_n+g_n)(x_n)>\|f_n+g_n\|-\varepsilon/n,$$

$$(f_n-g_n)(y_n)>\varepsilon/2,$$

则

$$\begin{aligned}2\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)&<(f_n+g_n)(x_n)+\frac{\varepsilon}{n}\\&=f_n\left(x_n+\frac{8y_n}{n}\right)+g_n\left(x_n-\frac{8y_n}{n}\right)-(f_n-g_n)\left(\frac{8y_n}{n}\right)+\frac{\varepsilon}{n}\\&\leqslant\left\|x_n+\frac{8y_n}{n}\right\|+\left\|x_n-\frac{8y_n}{n}\right\|-\frac{4\varepsilon}{n}+\frac{\varepsilon}{n}\\&\leqslant 2+\frac{\varepsilon}{32}\cdot\left\|\frac{16y_n}{n}\right\|-\frac{3\varepsilon}{n}\qquad(\text{用 } X \text{ 为 USS})\\&=2(1-5\varepsilon/4n),\end{aligned}$$

得出矛盾. 这就证得 X 为 USS $\Rightarrow X^*$ 为 UCS.

(iii) 若 X^* 是 UCS(或 USS),则由已证结论知 X^{**} (从而 X)是 USS(或 UCS),故定理得证. □

利用定理 5.3.10 及 X 与 X^* 的对偶性,就有可能从 USS 的一定性质推出 UCS 的某个性质,反之亦然. 下面就是一个典型例子.

5.3.11 定理(Milman 1938) 若 X 是完备的 UCS 或 USS,则 X 是自反空间.

证 首先设 X 是 UCS. 取定 $\varphi\in X^{**}$, 今证 $\varphi\in X$. 不妨设 $\|\varphi\|=1$, 于是有 $f_n\in S^*$, 使得 $|\varphi(f_n)|>1-1/n(\forall n\in\mathbf{N})$. 由 Helly 定理(5.1.3),

有 $x_n \in X$，使得

$$f_i(x_n) = \varphi(f_i)(1 \leqslant i \leqslant n), \qquad \| x_n \| < 1 + 1/n. \tag{6}$$

由(6)有

$$1 + 1/n > \| \tilde{x}_n \| > | \varphi(f_i) | > 1 - 1/i \qquad (i \leqslant n),$$

这推出 $\| x_n \| \to 1$. 因 X 在 X^{**} 中是闭的，故只要证 $\tilde{x}_n \to \varphi$. 设 $x' = x/\| x \|$，$\forall i \in \mathbf{N}$，由(6)显然有 $f_i(x'_n) \to \varphi(f_i)$. 于是

$$\begin{aligned} 2 \mid \varphi(f_i) \mid &= \lim_n \mid f_i(x'_n) + \varphi(f_i) \mid \\ &\leqslant \varliminf_n \| \tilde{x}'_n + \varphi \| \\ &\leqslant \varlimsup_n \| \tilde{x}'_n + \varphi \| \leqslant 2, \end{aligned}$$

这结合 $| \varphi(f_i) | > 1 - 1/i$ 得出 $\| \tilde{x}'_n + \varphi \| \to 2 (n \to \infty)$. 由 5.3.10，$X^{**}$ 一致凸，故必 $\tilde{x}'_n \to \varphi$，从而 $\tilde{x}_n \to \varphi$，如所要证．

若 X 是 USS，则 X^* 是 UCS(依 5.3.10)，因而 X^* 是自反空间，于是由 5.2.3(ii)推出 X 是自反空间． □

现在将已考虑过的几类 Banach 空间的相互关系综合一下．若只考虑完备空间，则有

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hilbert 空间} & \Longrightarrow & \text{UCS} & \Longrightarrow & \text{LUCS} & \Longrightarrow & \text{SCS} \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ & & \text{USS} & \Longrightarrow & \text{自反空间} & & \end{array}$$

所有这些空间，都可看作 Hilbert 空间的某种推广，因而或多或少具有 Hilbert 空间的某些性质，如已指出的 5.3.3，5.3.4 与 5.3.7 都是 Hilbert 空间熟知结论的推广．还可以举出其他一些这一类的结果．下面就是一个颇有价值的例子．

5.3.12 定理　设 X 是完备一致凸空间，$A \subset X$ 是非空闭凸集，$x \in X$，则 x 在 A 中有唯一最佳逼近．

若 X 是 Hilbert 空间，则以上结果是熟知的，其证明基于中线公式．考虑到一致凸条件(3)可看作某种极限形式的中线公式，5.3.12 的结论并不惊人，而且，其证明与相应 Hilbert 空间结果(参看 5.8.5)的证明是很类似的．尽管 5.3.12 无疑是 5.2.8，5.3.3 与 5.3.11 的推论，我们还是写出下述很具启发性的证明．

证　唯一性已蕴涵于 5.3.3，只要证存在性．不妨设 $x = 0$（否则以 $A - x$ 代 A），且可设 $0 \in A$. 于是问题归于证存在 $a \in A$，使得

$$\| a \| = \inf_{y \in A} \| y \| \triangleq \rho, \tag{7}$$

必 $\rho > 0$. 取序列 $\{x_n\} \subset A$，使得 $\| x_n \| \to \rho$，可设 $x_n \neq 0$. 令 $x'_n = x_n / \| x_n \|$，则

$$\| x'_m + x'_n \| = \frac{\| x_m \| + \| x_n \|}{\| x_m \| \| x_n \|} \left\| \frac{\| x_n \| x_m}{\| x_m \| + \| x_n \|} + \frac{\| x_m \| x_n}{\| x_m \| + \| x_n \|} \right\|$$

$$\geqslant \frac{2\rho^2}{\| x_m \| \| x_n \|} \to 2 \quad (m,n \to \infty),$$

这推出 $\| x'_m + x'_n \| \to 2(m,n \to \infty)$. 于是由一致凸性推出

$$\| x'_m - x'_n \| \to 0 \qquad (m,n \to \infty).$$

由完备性,$\{x'_n\}$ 收敛,从而 $\{x_n\}$ 亦收敛. 设 $x_n \to a \in A$,则 a 显然满足(7). □

D. 光滑性

已讨论过的几类空间涉及球面的一定凸性,如容易从有限维例子看出的,这自然地联系于球面的一定光滑性,后者是通过范数的可微性刻画的.

首先简要介绍赋范空间中的微分概念. 给定泛函 $p(\cdot):X \to \mathbf{R}$. 任给 $x,h \in X$,令 $\varphi(t) = p(x+th)$,定义

$$p'_{\pm}(x,h) = \varphi'_{\pm}(0).$$

当 $p'_{\pm}(x,h)$ 存在时称为 $p(\cdot)$ 在点 x 关于 h 的**单侧方向导数**. 若

$$p'_{+}(x,h) = p'_{-}(x,h),$$

则记为 $p'(x,h)$,并称其为 $p(\cdot)$ 在 x 关于 h 的**方向导数**. 若 $\forall h \in X$,$p'(x,h)$ 存在且关于 h 是连续线性的,则说 $p(\cdot)$ 在 x 为 **G 可微**(或弱可微),并称 $p'(x,\cdot) \in X^*$ 为 $p(\cdot)$ 在 x 的 **G 导数**,常记作 $p'(x)$ 或 $\nabla p(x)$. 若存在 $f_x \in X^*$,使得

$$| p(x+h) - p(x) - f_x(h) | = o(\| h \|), \tag{8}$$

则称 f_x 为 $p(\cdot)$ 在 x 的 **F 导数**,并说 $p(\cdot)$ 在 x 为 **F-可微**(或强可微). 式(8)相当于:$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon,x) > 0$,当 $h \in X, \| h \| < \delta$ 时有

$$| p(x+h) - p(x) - f_x(h) | \leqslant \varepsilon \| h \|. \tag{8$'$}$$

若(8)$'$对 $\| h \| < \delta$ 与 $x \in D$ 一致地满足,则说 $p(\cdot)$ 在 D 上**一致 F 可微**.

下面限定 $p(x) = \| x \|$. 取定 $x,h \in X$,令 $\varphi(t) = t^{-1}[p(x+th) - p(x)]$. 利用范数的性质容易验证:$\varphi(t)$ 在 $t>0$ 时单调增,在 $t<0$ 时单调减,且 $\varphi(s) < \varphi(t)(s<0<t)$. 因此 $p'_{\pm}(x,h)$ 必存在,且

$$p'_{-}(x,h) \leqslant p'_{+}(x,h) \leqslant p(x+h) - p(x) \leqslant \| h \|. \tag{9}$$

因 $p'_{-}(x,h) = -p'_{+}(x,-h)$,故只要考虑 $p'_{+}(x,h)$. $p'_{-}(x,h)$ 对 h 显然是正齐次的,易验证亦是次可加的,因而是次线性的. 若 $p'(x,h)$ 对所有 $h \in X$ 存在,则

$$\begin{aligned} p'(x,h+k) &\leqslant p'(x,h) + p'(x,k) \\ &= -p'(x,-h) - p'(x,-k) \end{aligned}$$

$$\leqslant -p'(x,-h-k) = p'(x,h+k),$$

可见 $p'(x,h)$ 对 h 是可加的．考虑到 $p'(x,h)$ 对 h 是正齐次的且 $p'(x,-h) = -p'(x,h)$ 知 $p'(x,h)$ 对 h 是实线性的，然后用不等式(9)得出 $p'(x,h)$ 对 h 连续．

若 $p(x)$ 在任何 $x \neq 0$ 处 G 可微，则称 X 为**光滑空间**．

5.3.13 定理　实赋范空间 X 是光滑的⇔对于单位球面 S 上每点 x_0，存在唯一 $f \in X^*$，使得 $f(h) \leqslant \|h\|$ $(\forall h \in X)$，$f(x_0) = 1$（或者说 $\{f=1\}$ 是 S 在 x_0 的唯一**支承超平面**）．

证　首先设 X 是光滑的．取定 $x_0 \in S$，若 $\{f=1\}$ 是 S 在 x_0 的支承超平面，则由

$$f(h) = \frac{f(x_0+th)-1}{t} \leqslant \frac{\|x_0+th\| - \|x_0\|}{t} \qquad (t>0)$$

推出 $f(h) \leqslant p'(x_0,h)$．以 $-h$ 代 h 得 $f(h) \geqslant p'(x_0,h)$，故 $f = p'(x_0)$ 唯一确定．

其次，设 S 在每点有唯一支承超平面．取定

$$x_0 \in S, h_0 \in X, r \in [p'_-(x_0,h_0), p'_+(x_0,h_0)],$$

令 $A = \mathrm{span}\{x_0,h_0\}$．定义 A 上的线性泛函

$$f_r(\alpha x_0 + \beta h_0) = \alpha + \beta r \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{R}).$$

利用不等式(9)及 r 的选择易验证 $f_r(h) \leqslant \|h\|$ $(\forall h \in A)$．由 Hahn-Banach 定理，f_r 可扩张为 $g_r \in X^*$，使得 $g_r(h) \leqslant \|h\|$ $(\forall h \in X)$，$g_r(x_0) = f_r(x_0) = 1$．由唯一性，g_r 与 r 无关，故必

$$r = p'_-(x_0,h_0) = p'_+(x_0,h_0),$$

因而 $p(\cdot)$ 在 x_0 为 G 可微．若 $0 \neq x \in X$，令 $\bar{x} = x/\|x\|$，则易直接验证 $p'(x,h) = p'(\bar{x},h)$ $(\forall h \in X)$，故 X 是光滑的．□

5.3.14 定理　实赋范空间 X 是一致光滑的 ⇔ $p(x) = \|x\|$ 在单位球面 S 上一致 F 可微．

证　首先设 X 是 USS．$\forall x \in S, h \in X, 0<\varepsilon<1$，取 $\delta>0$，使当 $\|th\| < \delta$ 时有

$$\|x+th\| + \|x-th\| \leqslant 2 + 2\varepsilon t\|h\|. \tag{10}$$

由(10)推出 $p'_+(x,h) - p'_-(x,h) \leqslant 2\varepsilon\|h\|$．令 $\varepsilon \to 0$ 得 $p'_+(x,h) = p'_-(x,h)$，可见 $p(\cdot)$ 在 S 上 G 可微，且由(9)有

$$1 - \|x-h\| \leqslant p'(x,h) \leqslant \|x+h\| - 1 \qquad (x \in S, h \in X). \tag{11}$$

结合(10)(11)得出，$\forall x \in S$，当 $\|h\| < \delta$ 时有

$$\begin{aligned}&|\,\|x+h\| - \|x\| - p'(x,h)\,| \\ \leqslant\ &\|x+h\| + \|x-h\| - 2 \leqslant 2\varepsilon\|h\|,\end{aligned}$$

这正表明 $p(\cdot)$ 在 S 上一致 F 可微.

反之,设 $p(\cdot)$ 在 S 上一致 F 可微,则 $p(\cdot)$ 必 G 可微,且 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in S$, 当 $\|h\|<\delta$ 时有

$$|\ \|x+h\|-\|x\|-p'(x,h)\ |\leqslant\varepsilon\|h\|. \tag{12}$$

结合(11)与(12)得出

$$\begin{aligned}&\|x+h\|+\|x-h\|-2\\&=[\|x+h\|-1-p'(x,h)]+[\|x-h\|-1-p'(x,-h)]\\&\leqslant 2\varepsilon\|h\|\qquad(x\in S,\|h\|<\delta).\end{aligned} \tag{13}$$

现在设 $y,z\in X,\varepsilon<\|y\|,\|z\|<\eta$, 令

$$x=\frac{y+z}{2},\qquad h=\frac{y-z}{2},\qquad x'=\frac{x}{\|x\|},\qquad h'=\frac{h}{\|x\|},$$

则当 $\|h'\|<\delta$, 即 $\|y-z\|<2\|x\|\delta$ 时,

$$\begin{aligned}\|y\|+\|z\|&=\|x+h\|+\|x-h\|\\&=\|x\|(\|x'+h'\|+\|x'-h'\|)\\&\leqslant\|x\|(2+2\varepsilon\|h'\|)\qquad(\text{用}(13))\\&=\|y+z\|+\varepsilon\|y-z\|,\end{aligned}$$

这正表明 X 是 USS. □

结合 5.3.10 与 5.3.14 得出如下推论.

5.3.15 推论 X 是一致凸空间 $\Leftrightarrow X^*$ 中的范数在单位球面 S^* 上一致 F 可微, X^* 是一致凸的 $\Leftrightarrow X$ 中的范数在单位球面 S 上一致 F 可微.

若 X 是实 Hilbert 空间,则可验证 $p(x)=\|x\|$ 在单位球面 S 上一致 F 可微,因而推出 $X=(X^*)$ 的一致凸性. 任给 $x\in S,h\in X,\|h\|<1$, 有

$$\begin{aligned}&|\ p(x+h)-p(x)-\langle x,h\rangle\ |\\&=\left|\frac{\|x+h\|^2-\|x\|^2}{\|x+h\|+\|x\|}-\langle x,h\rangle\right|\\&=\frac{|\ \langle x,h\rangle(\|x\|-\|x+h\|)+\|h\|^2\ |}{\|x+h\|+1}\\&\leqslant\frac{2\|h\|^2}{2-\|h\|}\leqslant 2\|h\|^2,\end{aligned}$$

这正表明 $p(x)$ 在 S 一致 F 可微,且其 F 导数 $p'(x)=x(x\in S)$.

§5.4 可数基空间

在前两节中我们看到,与 Hilbert 空间的类比是理解自反空间、一致凸空间等的合适方法. 除了单位球有特别好的拓扑与几何性质之外,Hilbert 空间的另一个重大优点是有正交坐标系这种极有效的工具可用,而一般 Banach 空

间却缺少类似的坐标系，因而无法完成在 Hilbert 空间中可顺利进行的许多精细论证．这就促使我们去关注那些存在某种坐标系的特殊 Banach 空间，这就是所谓可数基空间．

在本节中，X 总记一个 Banach 空间，i,j,k,n 等都表示自然数．

A. 可数基

5.4.1 定义　若存在序列 $\{e_i\} \subset X$，使得每个 $x \in X$ 可**唯一地**表成

$$x = \sum_i \alpha_i e_i, \tag{1}$$

则称 X 为**可数基空间**，称 $\{e_i\}$ 为 X 的一个**可数基**或 Schauder 基，通常可简称为基．

可数基存在是一个极强的条件，它蕴涵了许多有价值的结论．设 $\{e_i\}$ 是空间 X 的基，则直接从定义 5.4.1 得出以下结论：

(i) $\{e_i\}$ 必线性无关，特别其中不含零向量；

(ii) 展开式(1)相当于

$$x = \lim_n \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

由此可见，$\{e_i\}$ 是 X 的基本集(参考 4.1.8)，因而 X 可分．常见的可分 Banach 空间都有可数基．但 P. Enflo(1973)的一个令人惊异的例子否定了认为可分空间必有可数基的猜想．

(iii) 若将式(1)中的 α_i 写作 $f_i(x)$，则(1)可改写为

$$x = \sum_i f_i(x) e_i \qquad (x \in X). \tag{1$'$}$$

显然 f_i 是线性的，下面将证明 $f_i \in X^*$．直接看出

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \qquad (i,j \in \mathbf{N}),$$

可见 $\{f_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的双正交列(参看 4.3.8)．

(iv) 分解式(1)自然地产生算子序列 $\{P_n\}$ 与 $\{R_n\}$：

$$P_n x = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i, \qquad R_n = I - P_n, \tag{2}$$

P_n 称为关于基 $\{e_n\}$ 的自然投影．显然 $P_n x \to x, R_n x \to 0 (x \in X, n \to \infty)$．下面的许多分析实际上是围绕算子 P_n 进行的．

(v) 分解式(1)诱导出嵌入

$$e: X \to \mathbf{K}^\omega, \qquad x \to (f_i(x)). \tag{3}$$

若定义 $\|e(x)\| = \|x\| (x \in X)$，则得到等距同构 $X \to e(X)$．在这个意义上，每个可数基空间都可看作一个序列空间，这与无穷维可分 Hilbert 空间等距同构于 l^2(参看 5.8.4)，是颇相类似的．

给定序列 $\{e_i\}\subset X$，验证 $\{e_i\}$ 为基本集，通常并不困难．于是重要的问题是，一个基本集 $\{e_i\}$ 需满足什么条件才能成为基？下面是一个基本的结果.

5.4.2 定理 对于 Banach 空间 X 的基本集 $\{e_i:i\in\mathbf{N}\}$，以下条件互相等价：

(i) $\{e_i\}$ 是 X 的基；

(ii) 存在 X 上的等价范数 $\|\cdot\|_1$，使得对任给 $\{\alpha_i\}\subset\mathbf{K}$ 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|_1\qquad(1\leqslant n\leqslant m).\tag{4}$$

(iii) 存在 $\beta\geqslant 1$，使得对任给 $\{\alpha_i\}\subset\mathbf{K}$ 有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\leqslant\beta\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|\qquad(1\leqslant n\leqslant m).\tag{5}$$

证 (i)⇒(ii). 设 $\{e_i\}$ 是 X 的基．定义

$$\|x\|_1=\sup_n\|P_n x\|\qquad(x\in X).\tag{6}$$

直接验证 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数，它满足(4)，$\|x\|\leqslant\|x\|_1$，且

$$\|f_i(x)e_i\|=\|P_i x-P_{i-1}x\|\leqslant 2\|x\|_1.\tag{7}$$

为证 $\|\cdot\|_1$ 等价于 $\|\cdot\|$，只需证 $(X,\|\cdot\|_1)$ 完备(依 4.2.4(ii))．设 $\{x_n\}\subset X$ 依 $\|\cdot\|_1$ 为 Cauchy 列，则用(7)得

$$\|f_i(x_m-x_n)e_i\|\leqslant 2\|x_m-x_n\|_1\to 0\qquad(m,n\to\infty),$$

可见 $\{f_i(x_n):n\in\mathbf{N}\}$ 是 Cauchy 列．设 $f_i(x_n)\to\alpha_i(n\to\infty,i\in\mathbf{N})$，今证依范数 $\|\cdot\|_1$ 有 $x_n\to y=\sum\alpha_i e_i$. 令 $y_i=\sum\limits_{j\leqslant i}\alpha_j e_j$，$\forall\varepsilon>0$，取 $n_0\in\mathbf{N}$，使得 $\|x_m-x_n\|_1<\varepsilon(\forall m,n\geqslant n_0)$，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}f_i(x_m)e_i-P_k x_n\right\|<\varepsilon\qquad(\forall m,n\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}).$$

在上式中令 $m\to\infty$ 得

$$\|y_k-P_k x_n\|\leqslant\varepsilon\qquad(\forall n\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}).\tag{8}$$

利用这一结果并注意 $P_k x_n\to x_n(k\to\infty)$，

$$\|y_k-y_l\|\leqslant\|y_k-P_k x_n\|+\|P_k x_n-P_l x_n\|+\|P_l x_n-y_l\|,$$

得出 $y_k\to x\in X$，$\alpha_i=f_i(x)$．于是(8)可改写成

$$\|P_k(x-x_n)\|\leqslant\varepsilon\qquad(\forall n\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}).$$

这推出 $\|x-x_n\|_1\leqslant\varepsilon(n\geqslant n_0)$，故 $\|x_n-x\|_1\to 0(n\to\infty)$.

(ii)⇒(iii)是平凡的．

(iii)⇒(i). 取定 $x\in X$，若 $x=\sum\alpha_i e_i$，则由(5)推出

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\leqslant\beta\|x\| \qquad (\forall n\in\mathbf{N}). \tag{9}$$

由(9)推出：若 $0=\sum\alpha_i e_i$，则必 $\alpha_i\equiv 0$. 这又推出，若分解式(1)成立，则系数 α_i 必唯一决定. 取 $x_n=\sum_i\alpha_{ni}e_i$（有限和），使 $x_n\to x(n\to\infty)$. 类似于(7)，由(9)推出

$$\|(\alpha_{mi}-\alpha_{ni})e_i\|\leqslant 2\beta\|x_m-x_n\|,$$

故得 $\alpha_{ni}\to\alpha_i(n\to\infty,\forall i\in\mathbf{N})$. 类似于本证明第一段，可得 $x=\sum\alpha_i e_i$. 故 $\{e_i\}$ 是 X 的基. □

设 $\{e_i\}$ 是 X 的基，则由不等式(7)推出 $f_i\in X^*(\forall i\in\mathbf{N})$. $\forall f\in X^*$，由展开式(1)′得

$$f(x)=\sum_i f(e_i)f_i(x) \qquad (\forall x\in X).$$

这就表明，在弱 * 收敛意义下 $\{f_i\}$ 是 X^* 的可数基，且

$$f=\sum_i f(e_i)f_i \qquad (f\in X^*), \tag{10}$$

此展开式在弱 * 收敛意义上理解. 其次，由(6)有

$$\|P_n x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant\text{const}\|x\| \qquad (\forall x\in X),$$

这表明 $\{P_n\}\subset L(X)$ 一致有界.

以下结果形式上降低了基的条件.

5.4.3 定理　给定序列 $\{e_i\}\subset X$，若在弱收敛意义上每个 x 可唯一地表为展开式(1)，则 $\{e_i\}$ 是 X 的基.

证　因 $P_n x\rightharpoonup x(n\to\infty,x\in X)$，故 $\{P_n x\}$ 对 n 有界，因此范数 $\|x\|_1$（依(6)）仍有意义，且

$$\|x\|\leqslant\varliminf_n\|P_n x\|\leqslant\|x\|_1 \qquad (\text{用 §5.1(9)}).$$

$\{e_i\}$ 是 X 的弱基本集，亦必为基本集（依 4.4.5(i)）. 因此，如同 5.4.2 之证，只需证明 $(X,\|\cdot\|_1)$ 是完备的. 为此，只需将 5.4.2 之证的第一段略作修改. 保持那里的记号，但现在应将条件 $P_k x_n\to x_n$ 换成 $P_k x_n\rightharpoonup x_n(k\to\infty,n\in\mathbf{N})$（$\{x_n\}$ 是 X 中的 $\|\cdot\|_1$- Cauchy 列）. 不过不等式(8)仍保持成立，于是 $\forall f\in X^*$ 有

$$\begin{aligned}|f(y_k-y_l)|&\leqslant|f(y_k)-P_k x_n|+|f(P_k x_n-P_l x_n)|+|f(P_l x_n-y_l)|\\&\leqslant 2\varepsilon\|f\|+|f(P_k x_n-P_l x_n)| \qquad (n\geqslant n_0),\end{aligned}$$

这表明 $\{y_k\}$ 弱收敛. 由 4.4.2，必有 $x\in X$，使 $y_k\rightharpoonup x(k\to\infty)$. 于是如同 5.4.2 之证可得 $\|x_n-x\|_1\to 0(n\to\infty)$. □

5.4.4 推论　(i) 设序列 $\{e_i\}\subset X$ 线性无关，存在 $\{f_i\}\subset X^*$，使得

$\forall f \in X^*$，依弱*收敛有展开式(10)，则 $\{e_i\}$ 是 X 的基．

(ii) 若 X 是自反空间，$\{e_i\}$ 是 X 的基，$\{f_i\}$ 是其双正交列，则 $\{f_i\}$ 是 X^* 的基．

证 (i) $\forall x \in X, f \in X^*$，由(10)有

$$f(x) = \sum_i f(e_i) f_i(x) = \lim_n f\Big(\sum_{i=1}^n f_i(x) e_i\Big),$$

这表明在弱收敛意义上有

$$x = \sum_i f_i(x) e_i,$$

于是由 5.4.3 知 $\{e_i\}$ 是 X 的基．

由(i)直接推出(ii). □

以下结果表明，一个可数基 $\{e_i\}$ 经适当小的扰动后仍保持为基．

5.4.5 定理 设 $\{e_i\} \subset X$ 是一个基，$\{e_i'\} \subset X$ 是一基本集，$\{f_i\}$ 与 $\{e_i\}$ 双正交．若

$$\sigma \triangleq \sum_i \| e_i - e_i' \| \, \| f_i \| < 1, \tag{11}$$

则 $\{e_i'\}$ 也是 X 的一个基．

证 设 m, n, β 依式(5)，今证 $\{e_n'\}$ 满足一个类似于(5)的不等式．任给 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{K}$，令 $x_n = \sum_1^n \alpha_i e_i$，$y_n = \sum_1^n \alpha_i e_i'$，则

$$\begin{aligned} \| y_n \| &\leqslant \| x_n \| + \Big\| \sum_{i=1}^n f_i(x_n)(e_i - e_i') \Big\| \\ &\leqslant \| x_n \| + \| x_n \| \sum_{i=1}^n \| e_i - e_i' \| \, \| f_i \| \\ &\leqslant (1+\sigma) \| x_n \| \leqslant \beta(1+\sigma) \| x_m \|, \qquad (\text{用(5)}) \\ \| y_m \| &\geqslant \| x_m \| - \Big\| \sum_{i=1}^m f_i(x_m)(e_i - e_i') \Big\| \\ &\geqslant (1-\sigma) \| x_m \|. \end{aligned}$$

综合以上两个不等式得到

$$\| y_n \| \leqslant \frac{\beta(1+\sigma)}{1-\sigma} \| y_m \| \qquad (1 \leqslant n \leqslant m),$$

于是由 5.4.2 得出所要证． □

设 $\{e_i\}$ 是 X 的可数基，$\{f_i\}$ 是其双正交列，则

$$1 = f_i(e_i) \leqslant \| f_i \| \, \| e_i \| \leqslant \text{const},$$

最后一个不等号依据不等式(7)．由以上不等式推出

$$\sup_i \| e_i \| < \infty \Leftrightarrow \inf_i \| f_i \| > 0,$$

$$\inf_i \| e_i \| > 0 \Leftrightarrow \sup_i \| f_i \| < \infty.$$

当 $0 < \inf \| e_i \| \leqslant \sup \| e_i \| < \infty$ ($\Leftrightarrow 0 < \inf \| f_i \| \leqslant \sup \| f_i \| < \infty$)时称 $\{e_i\}$ 为**有界基**．若 $\{e_i\}$ 是有界基，则易推出 $l^1 \subset e(X) \subset c_0$，其中 $e(\cdot)$ 依(3)，空间 l^1，c_0 见 § 5.6.

B. 可数基的例子

若 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交基(参看 5.8.3)，则 $\{e_i\}$ 显然是 H 的可数基．若 $e_i = (\delta_{ij} : j \in \mathbf{N})$，则 $\{e_i\}$ 是空间 $l^p (1 \leqslant p < \infty)$ 的可数基．这些都是极明显的例子，但它们为可数基概念提供了很直观的原型．常见的可分 Banach 空间的可数基都已求得，它们的构造已不那么简单，下面仅考虑相对较简单的两个例子．

1° Schauder 函数系　$\{\varphi_i\}$：$\varphi_1(t) \equiv 1$，$\varphi_2(t) = t$，当 $i = 2^k + j + 1 (j = 1, 2, \cdots, 2^k, k = 0, 1, \cdots)$ 时，$\varphi_i(t)$ 在区间 $\Delta_{kj} \triangleq \left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right)$ 之外为零，在 Δ_{kj} 的中点处为 1，在其余部分线性连接．可验证 $\{\varphi_i\}$ 是 $C[0,1]$ 的基本集．在 φ_{n+1} 不为零的区间 I 上，$\varphi_i (i \leqslant n)$ 均为线性函数．任给 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{R}$，令 $\varphi = \sum_1^n \alpha_i \varphi_i$，则

$$\begin{aligned}\| \varphi \|_0 &= \Big(\sup_{t \in [0,1] \setminus I} | \varphi(t) | \Big) \vee \Big(\sup_{t \in I} | \varphi(t) | \Big) \\ &= \sup_{t \in [0,1] \setminus I} | \varphi(t) | = \sup_{t \in [0,1] \setminus I} | \varphi(t) + \alpha_{n+1} \varphi_{n+1}(t) | \\ &\leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i \Big\|_0 .\end{aligned}$$

这表明 $\{\varphi_i\}$ 满足 5.4.2 之条件(iii)，因此 $\{\varphi_i\}$ 是空间 $C[0,1]$ 的一个可数基．

2° Haar 函数系　$\{h_i\}$：$h_1(t) \equiv 1$，h_{2^k+j} 在区间 $\Delta_{kj} (j = 1, 2, \cdots, 2^k, k = 0, 1, \cdots)$ 的前后两半上分别为 1 与 -1，而在它处为零，则同样可说明 $\{h_i\}$ 是空间 $L^p[0,1] (1 \leqslant p < \infty)$ 的基本集，且

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \Big\|_p \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i h_{i+1} \Big\|_p ,$$

其中 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{R}$. 于是由 5.4.2 得出 $\{h_i\}$ 是空间 $L^p[0,1]$ 的可数基．

在以上讨论中，一些推理细节已省去，其完整表述有些繁琐，不过从直观上看来还是明显的．

C. 可数基空间的性质

以下设 X 是具有可数基 $\{e_i\}$ 的 Banach 空间．形式上看，$\{e_i\}$ 有点像 Hilbert 空间的标准正交基．但实际上 $\{e_i\}$ 一般远没有那么好的性质．例如，

不仅不能断定 e_i 为单位向量，甚至不能断定 $\|e_i\|$ 有上界或正下界．这些不确定性都妨碍了运用可数基去得出很接近于 Hilbert 空间的结果．尽管如此，可数基还是有一些有价值的应用．

以下设 $\{f_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的双正交列，P_n 依(2).

5.4.6 定理 (i) $A\subset X$ 相对紧 $\Leftrightarrow$ A 有界且对 $x\in A$ 有 $P_n x \rightrightarrows x(n\to\infty)$.

(ii) 设 $x,x_n\in X(n\in\mathbf{N})$，则 $x_n\to x \Leftrightarrow f_i(x_n)\to f_i(x)(\forall i\in\mathbf{N})$ 且对 $n\in\mathbf{N}$ 有 $P_k x_n \rightrightarrows x_n(k\to\infty)$.

证 (i) 首先设 A 相对紧，则 A 有界．若不对 $x\in A$ 使 $P_n x\rightrightarrows x$，则存在 $\varepsilon>0$ 与 $n_1<n_2<\cdots$，$x_k\in A$，使得

$$\|P_{n_k}x_k-x_k\|\geqslant\varepsilon \qquad (\forall k\in\mathbf{N}).$$

由 A 相对紧，不妨设 $x_k\to x$，于是

$$\begin{aligned}\varepsilon&\leqslant\|P_{n_k}(x_k-x)\|+\|P_{n_k}x-x\|+\|x-x_k\|\\&\leqslant\|x_k-x\|_1+\|P_{n_k}x-x\|+\|x-x_k\|\to0 \qquad (k\to\infty)\end{aligned}$$

(其中 $\|\cdot\|_1$ 依(6))，得出矛盾．

反之，设 A 有界，对 $x\in A$ 有 $P_n x\rightrightarrows x$，取定 $\{x_n\}\subset A$. 由不等式(7)推出 A"依坐标"有界，即 $\forall i\in\mathbf{N}$: $f_i(A)$ 有界．于是用"对角线法"可取出 $\{x_n\}$ 的一子列，不妨仍记作 $\{x_n\}$，使得 $f_i(x_n)\to\alpha_i(n\to\infty,\forall i\in\mathbf{N})$. 令 $y_k=\sum_1^k\alpha_i e_i$，则

$$\begin{aligned}\|y_k-y_l\|&\leqslant\|y_k-P_kx_n\|+\|P_kx_n-P_lx_n\|+\|P_lx_n-y_l\|\\&\triangleq I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $k_0\in\mathbf{N}$，使得 $\forall k,l\geqslant k_0$，有 $I_2<\varepsilon$. 固定 $k,l\geqslant k_0$，取 n 充分大，使 $I_1+I_3<\varepsilon$，从而 $\|y_k-y_l\|<2\varepsilon(\forall k,l\geqslant k_0)$. 这得出 $y_k\to x=\sum\alpha_i e_i$，且 $\|y_k-x\|\leqslant2\varepsilon(\forall k\geqslant k_0)$. 然后由

$$\|x_n-x\|\leqslant\|x_n-P_kx_n\|+\|P_kx_n-y_k\|+\|y_k-x\|$$

得出 $x_n\to x$. 故 A 相对紧．

(ii) 只要证充分性．设 $f_i(x_n)\to f_i(x)(n\to\infty,\forall i\in\mathbf{N})$，且对 $n\in\mathbf{N}$ 有 $P_kx_n\rightrightarrows x_n(k\to\infty)$，则由

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&\leqslant\|x_n-P_kx_n\|+\|P_kx-x\|\\&\quad+\sum_{i=1}^k|f_i(x_n-x)|\,\|e_i\|\end{aligned}$$

看出 $x_n\to x$. □

5.4.7 命题 设 $\{e_i\}$ 与 $\{f_i\}$ 分别为 X 与 X^* 的基，$T\in L(X)$，$Te_j=$

$\sum_i a_{ij}e_i$，则以下结论成立：

(i) $T^* f_i = \sum_j a_{ij} f_j$；

(ii) T 是紧算子 $\Leftrightarrow \| P_n T - T \| \to 0 \Leftrightarrow$ 对于 $\|x\| \leqslant 1$ 有 $R_n Tx \rightrightarrows 0$，$P_n$ 与 R_n 依(2).

证 (i) 因 $\{f_i\}$ 是 X^* 的基，故(参照(10))

$$T^* f_i = \sum_j (T^* f_i)(e_j) f_j,$$

$$(T^* f_i)(e_j) = f_i(Te_j) = \sum_k a_{kj} f_i(e_k) = a_{ij},$$

这得出所要等式.

(ii) 显然只要证第一个等价性. 因 $\dim R(P_n) < \infty$，故 P_n 是紧算子，因此当 $\| P_n T - T \| \to 0$ 时 T 是紧算子(用 5.1.19). 反之，若 T 是紧算子，则 TB_X 相对紧，于是由 5.4.6(i)知对 $x \in B_X$ 有 $P_n Tx \rightrightarrows Tx (n \to \infty)$，这正意味着 $\| P_n T - T \| \to 0$. □

最后，我们给出有可数基的自反空间的一个刻画.

5.4.8 定义 设 $\{e_i\}$ 是 X 的基，$A_n = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \geqslant n\}$. 若 $\forall f \in X^*$，有 $\| f \mid A_n \| \to 0 (n \to \infty)$，则说基 $\{e_i\}$ 是**收缩的**. 若对任何 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{K}$，$\sup_n \left\| \sum_1^n \alpha_i e_i \right\| < \infty$ 蕴涵 $\sum \alpha_i e_i$ 收敛，则说 $\{e_i\}$ 是**有界完备的**.

设 $1 < p < \infty$，$\{e_i\}$ 是 l^p 的标准基，$\forall y = (y_i) \in l^q$，$q = p/(p-1)$，令 $f(x) = \sum x_i y_i (x = (x_i) \in l^p)$，则

$$\| f \mid A_n \| = \Big(\sum_{i \geqslant n} | y_i |^q \Big)^{1/q} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

这表明 $\{e_i\}$ 是收缩的. 若 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{K}$ 使得

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|_p = \sup_n \Big(\sum_{i=1}^n | \alpha_i |^p \Big)^{1/p} < \infty,$$

则显然 $x = \sum \alpha_i e_i \in l^p$，这表明 $\{e_i\}$ 是有界完备的.

以上结论是否仅基于空间 $l^p (1 < p < \infty)$ 的自反性？以下定理对此作出了肯定回答.

5.4.9 定理(James) 设 X 是有可数基的 Banach 空间，则 X 是自反的 $\Leftrightarrow$ X 的任何可数基是收缩的有界完备基.

证 设 X 是自反的，$\{e_i\}$ 是 X 的可数基，$\{f_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的双正交列. 由 5.4.4(ii)，$\{f_i\}$ 是 X^* 的基，且容易验证 P_n^* 正是关于基 $\{f_i\}$ 的自然投影(P_n 依(2)). 令 $A_n = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \geqslant n\}$，$\forall f \in X^*$，有

$$\| f \mid A_n \| = \| (P_{n-1}^* f - f) \mid A_n \|$$

$$\leqslant \| P_{n-1}^* f - f \| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

这表明 $\{e_i\}$ 是收缩的．若 $\{\alpha_i\} \subset \mathbf{K}$ 使得 $\sup\limits_n \left\| \sum_1^n \alpha_i e_i \right\| < \infty$，则由定理 5.2.2 有 $n_1 < n_2 < \cdots$，使得 $\sum_1^{n_k} \alpha_i e_i \rightharpoonup x(k \to \infty)$．这推出 $\alpha_1 = f_i(x)(\forall i \in \mathbf{N})$，因而 $x = \sum \alpha_i e_i$．故 $\{e_i\}$ 是有界完备基．

反之，设 X 有收缩的有界完备基 $\{e_i\}$，今证 X 是自反的．为此只要证，对任给序列 $\{x_n\} \subset S_X$，其中可选出弱收敛子列．设 $\{f_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的双正交列，用标准的对角线程序可取出子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $f_i(x_{n_k}) \to \alpha_i(\forall i \in \mathbf{N})$．因

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| = \left\| \lim_k \sum_{i=1}^n f_i(x_{n_k}) e_i \right\|$$

$$= \| \lim_k P_n x_{n_k} \| \leqslant \| P_n \|,$$

故由 $\{e_i\}$ 的有界完备性得 $x = \sum \alpha_i e_i \in X$；$f_i(x_{n_k}) \to f_i(x)(k \to \infty, i \in \mathbf{N})$．$\forall f \in X^*$，由 $\{e_i\}$ 的收缩性有

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i - f \right\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left| \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i(x) - f(x) \right|$$

$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \left| \sum_{i > n} f(e_i) f_i(x) \right|$$

$$= \sup_{x \in A_{n+1}, \|x\| \leqslant 1} | f(x) |$$

$$= \| f \mid A_{n+1} \| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

这表明 $\{f_i\}$ 是 X^* 的基．因此 $x_{n_k} \rightharpoonup x$（用 5.1.5），如所要证． □

§5.5 半序空间

本书序章中已经提到，抽象空间通常是互相兼容的几种基本数学结构的结合（参看 §1.1E）．TVS 及作为其特款的赋范空间，正是兼有拓扑结构与代数结构的典型例子．然而，直到现在为止，并未在 TVS 中考虑任何序结构，因而任何涉及不等式 $x \leqslant y(x, y \in X)$ 的概念与命题，在 TVS 中尚无意义．这势必大大限制抽象空间理论的发展与应用．实际上，在 TVS 中引进序结构不仅是可能的，而且导向一个异常丰富的理论．本节只是这一理论的极初步的介绍．

本节中设 X 是**实**赋范空间．

A. 锥与序锥

5.5.1 定义 设 $\varnothing \neq K \subset X$．若 $\forall t > 0$，有 $tK \subset K$，则称 K 为**锥**．若

K 是一个闭凸锥，且满足条件

$$K \cap (-K) = \{0\} \neq K, \tag{1}$$

则称 K 为**序锥**.

若 $K \subset X$ 是一个锥，则 K 是凸锥的充要条件是 $K + K \subset K$. 若 K 是闭锥，则任取 $x \in K$，有 $n^{-1}x \to 0 \in K(n \to \infty)$.

若 $K \subset X$ 是一序锥，定义

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y \geqslant x \Leftrightarrow y - x \in K \qquad (x, y \in X), \tag{2}$$

则可验证$\leqslant$有以下性质：

(i) $\leqslant$是 X 上的一个半序(依 1.1.4)；

(ii) 半序$\leqslant$是**线性的**[①]，这意味着

$$\begin{cases} x_i \leqslant y_i (i = 1, 2) \Rightarrow x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2, \\ x \leqslant y, \alpha \geqslant 0 \Rightarrow \alpha x \leqslant \alpha y; \end{cases}$$

(iii) 半序$\leqslant$是**连续的**，这意味着

$$x_n \leqslant y_n (\forall n \in \mathbf{N}) \Rightarrow \lim_n x_n \leqslant \lim_n y_n \qquad (\text{假定极限存在});$$

(iv) $\leqslant$是非平凡的，这意味着至少有一个 $x \in X$，使 $0 \neq x \geqslant 0$.

反之，若 X 上给定了一个满足上述条件(i)～(iv)的半序$\leqslant$，令

$$K = \{x \in X : x \geqslant 0\}, \tag{3}$$

则易直接验证 K 是 X 上的一个序锥. 这就表明，给定一个序锥与给定一个满足条件(i)～(iv)的序是等价的. 当如上的 K 或$\leqslant$已给定时，称 X 为半序赋范空间，简称为**半序空间**[②]，必要时将它写作 (X, K) 或 $(X, \leqslant)$，并称$\leqslant$为锥 K 导入的序.

半序空间的原型就是熟知的 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ 的"第一象限" $\mathbf{R}^n_+$ 显然是一个序锥，它在 $\mathbf{R}^n$ 上导入一个半序$\leqslant$. 任给 $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbf{R}^n$，有

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{R}^n_+ \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{4}$$

由(4)表出的序$\leqslant$称为 $\mathbf{R}^n$ 中的通常向量序，简称为**向量序**. 向量序在数学及其他领域之应用已如此广泛，以至已成为一种常识. 在半序空间理论中，适当地借鉴颇具直观性的向量序，是有益的.

以下设 X 上已给定一个序锥 K，且在 X 中使用由 K 导入的半序$\leqslant$. 对任给 $x, y \in X$，约定

$$\begin{cases} x < y \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow 0 \neq y - x \in K, \\ x \ll y \Leftrightarrow y \gg x \Leftrightarrow y - x \in K^{\circ}. \end{cases} \tag{5}$$

若 $x > 0$，则称 x 为**正元**；若 $x \gg 0$，则称 x 为**强正元**. 若 $a, b \in X, a \leqslant b$，则

---

① 通常也称全序为线性序，注意与此区别.

② 对于半序空间或有序空间，文献中所给的条件可能略有差异.

称

$$[a,b]\triangleq\{x\in X: a\leqslant x\leqslant b\} \tag{6}$$

为**序区间**．若 $A\subset X$，存在 $a,b\in X$，使 $A\subset[a,b]$，则称 A 为**序有界集**．若序列 $\{x_n\}\subset X$ 满足 $x_n\leqslant x_{n+1}(\forall n\in\mathbf{N})$，则称 $\{x_n\}$ 为单调增序列或简称为**增序列**．若 $\leqslant$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量序，则 $\{x^{(k)}\}\subset\mathbf{R}^n$ 是增序列意味着其各坐标为增序列. $\mathbf{R}^n$ 中的序区间 $[a,b]$ 就是一个以 a,b 为其顶点的 n 维方体．

B. 正规锥

尽管与向量序的类比使抽象的半序空间获得某种直观形象，但仍可能出现一些非直观上所期望的怪异性质．例如，序区间 $[a,b]$ 未必是有界集！为避免这类情况，只有对序锥 K 作更强的限制．

5.5.2 定义 (i) 若 $X=K-K$，则说 K 是**再生的**．

(ii) 若 $X=\overline{\mathrm{span}K}$，则说 K 是**完全的**．

(iii) 若 X 中的序有界集必范数有界，则称 K 为**正规锥**．

(iv) 若 X 中的序有界增序列必收敛，则称 K 为**正则锥**．

(v) 若 X 中的范数有界增序列必收敛，则称 K 为**全正则锥**．

我们关注的重点是正规锥，下面给出它的一些等价刻画．

5.5.3 定理 对于半序空间 (X,K)，以下条件互相等价：

(i) K 是正规锥；

(ii) $\inf\{\|x+y\|: x+y\in K\cap S_X\}>0$；

(iii) $\exists\beta>0: 0\leqslant x\leqslant y\Rightarrow\|x\|\leqslant\beta\|y\|$；

(iv) $(B_X+K)\cap(B_X-K)$ 范数有界．

证 (i)⇒(ii). 若(ii)不成立，则存在 $x_n,y_n\in K\cap S_X$，使得

$$\|x_n+y_n\|<n^{-3}\qquad(\forall n\in\mathbf{N}),$$

这推出

$$0\leqslant nx_n\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k(x_k+y_k)\triangleq b,$$

上式表明序区间 $[0,b]$ 范数无界，因而 K 必非正规锥．

(ii)⇒(iii). 若(iii)不成立，则存在 $x_n,y_n\in X$，使得

$$0\leqslant x_n\leqslant y_n,\ \|x_n\|>n\|y_n\|\qquad(\forall n\in\mathbf{N}).$$

约定 $x'=x/\|x\|$，令 $z_n=y'_n-nx'_n$，则

$$x'_n,z'_n\in K\cap S_X, n-1\leqslant\|z_n\|\leqslant n+1.$$

于是

$$\|x'_n+z'_n\|=\left\|\frac{y'_n-z_n}{n}+\frac{z_n}{\|z_n\|}\right\|$$

$$\leqslant \left\|\frac{y_n'}{n}\right\| + \left\|\frac{(n - \|z_n\|)z_n}{n\|z_n\|}\right\| \leqslant \frac{2}{n},$$

这表明条件(ii)必不满足．

(iii)⇒(iv). $\forall a,b \in B_X, x,y \in K$，由 $a+x=b-y$ 推出 $0 \leqslant x \leqslant x+y=b-a$，于是由条件(iii)有 $\|x\| \leqslant \beta\|b-a\| \leqslant 2\beta$，因而 $\|a+x\| \leqslant 2\beta+1$，这表明 $(B_X+K) \cap (B_X-K)$ 有界．

(iv)⇒(i). 设 $[a,b] \subset X$ 是一序区间，不妨设 $a,b \in B_X$. $\forall x \in [a,b]$，有

$$x = a + (x-a) = b - (b-x) \in (B_X+K) \cap (B_X-K),$$

于是由条件(iv)推出 $[a,b]$ 范数有界，因此 K 是正规锥．　□

若 $\dim X < \infty$，则 $K \cap S_X$ 是紧集，而由条件(1)推出 $x,y \in K \cap S_X$ 时 $x+y \neq 0$，因此 5.5.3 中条件(ii)必满足，从而 K 是正规锥．由此可见，正规锥概念只有在无限维空间中才有意义．对于正则与全正则锥，亦可得出同样的结论．

5.5.4 推论　对于序锥 K，有全正则 ⇒ 正则 ⇒ 正规．

证　直接由 5.5.2 看出，正规+全正则 ⇒ 正则．若 K 非正规锥，则由 5.5.3(ii)有 $x_n, y_n \in K \cap S_X$，使得 $\|x_n+y_n\| < n^{-2}$ ($\forall n \in \mathbf{N}$). 令

$$z_{2n} = \sum\nolimits_1^n (x_i+y_i),\ z_{2n+1} = z_{2n} + x_{n+1},$$

则 $\{z_n\}$ 是范数有界且序有界的增序列，它显然不收敛．因此 K 既非正则锥亦非全正则锥．这结合上面已得之结论看出：全正则 ⇒ 正则 ⇒ 正规，如所要证.　□

正则(或全正则)锥的意义在于，仅当 K 是正则(或全正则)锥时，在 X 中才能如同在经典分析中一样运用**有界单调收敛原理**：序有界(或有界)单调序列必收敛．这一事实对于无限维半序空间尤有意义．

注意 $X = K - K \Leftrightarrow X = \operatorname{span} K$，因此再生锥必是完全的．其次，若 $K^\circ \neq \varnothing$，则有 $x + rB_X \subset K\ (r>0)$，于是

$$B_X \subset r^{-1}(K-x) \subset \operatorname{span} K,$$

因而 $X = \operatorname{span} K$. 因此，内部非空⇒再生性⇒完全性，三者反映了锥的“丰满程度”的几个递进层次．$K^\circ \neq \varnothing$ 是一个极有用的条件，可惜许多常用的半序空间并不满足这一条件．

5.5.5 定理　设 X 完备，则 K 是再生锥的充要条件是

$$\exists \delta > 0, \text{使 } \delta B \subset (K \cap B) - (K \cap B) \qquad (B = B_X). \tag{7}$$

证　令 $A = (K \cap B) - (K \cap B)$. 若 $\delta B \subset A, \delta > 0$，则

$$X = \bigcup_n n\delta B \subset \bigcup_n nA \subset K - K,$$

故 K 是再生的．反之，设 K 是再生的，则易见 $X = \bigcup_1^\infty nA$. 由定理 3.2.6，必

$(\bar{A})^\circ \neq \varnothing$. 由 $(\bar{A})^\circ$ 为对称凸集推出 $0 \in (\bar{A})^\circ$，于是存在 $\delta > 0$，使得 $2\delta B \subset \bar{A}$. $\forall x \in \delta B$，取 $x_1 \in A \cap B_\delta(2x)$，然后取

$$x_2 \in A \cap B_\delta(4x - 2x_1), \cdots,$$

如此得序列 $\{x_n\} \subset A$，使得

$$x_n \in B_\delta\Big(2^n x - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} x_i\Big),$$

由此得 $x = \sum_1^\infty 2^{-n} x_n \in A$. 因此 $\delta B \subset A$，如所要证． □

C. 对偶锥

为记号简便，作如下约定：

$$A \leqslant B \Leftrightarrow \forall a \in A, b \in B, \text{有 } a \leqslant b,$$

$$\langle A, F\rangle = \{f(x): x \in A, f \in F\} = F(A),$$

其中 $A, B \subset X, F \subset X^*$. 类似地，记号 $A < B, A \leqslant b$ 及 $\langle x, F\rangle$ 等的意义自明.

5.5.6 定义 任给锥 $K \subset X$，称

$$K^+ = \{f \in X^*: f(K) \geqslant 0\} \tag{8}$$

为 K 的对偶锥．

直接看出 K^+ 是 X^* 中的弱 * 闭凸锥，因而也是闭凸锥．不过，K^+ 未必满足条件(1)，因而未必是序锥．不过，当 K 是序锥并在 X 中导入半序时，仍约定在 X^* 中依 K^+ 定义如下对偶序：

$$f \leqslant g \Leftrightarrow g - f \in K^+ \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \qquad (\forall x \in K).$$

如此定义的序 $\leqslant$ 是一个线性、连续的拟序，但未必为半序，也未必存在正元，即满足 $f(K) \geqslant 0$ 的非零连续线性泛函．

若取 $K = \mathbf{R}_+^n$，则

$$y \in K^+ \Leftrightarrow y \in \mathbf{R}^n, y \cdot x \geqslant 0 \qquad (\forall x \in \mathbf{R}_+^n).$$

特别，设 $\{e_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基，则由 $y \cdot e_i \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$ 得 $y \geqslant 0$，因此 $K^+ = \mathbf{R}_+^n$，这表明 $\mathbf{R}_+^n$ 以自身为其对偶锥．

如果将 $K \to K^+$ 看作一种运算，则它与运算 $K \to K^0$ 或 $K \to K^\perp$ 颇相类似，因而可借鉴 §4.4A 中那些结果．下面汇集一些有用的公式，其证明是直接的．

$$F \subset K^+ \Leftrightarrow F(K) \geqslant 0 \Leftrightarrow K \subset F^+, \tag{9}$$

$$K \subset M \subset X \Rightarrow K^+ \supset M^+, \tag{10}$$

$$K^+ = (\overline{\mathrm{co}K})^+, \tag{11}$$

其中 $K \subset X, F \subset X^*$. 若 K 为子空间，则 $K^+ = K^\perp$.

以下结果显然是双极定理的一个类似(参照 §4.4(12)).

5.5.7 命题 任给锥 $K \subset X$，有

$$X \cap K^{++} = \overline{\mathrm{co}K}. \tag{12}$$

证　由 $\langle K, K^{+}\rangle \geqslant 0$ 推出 $K \subset K^{++}$，因而

$$K \subset X \cap K^{++}.$$

因 $X \cap K^{++}$ 必为闭凸锥，故得 $\overline{\mathrm{co}K} \subset X \cap K^{++}$. 若 $x \in X \backslash \overline{\mathrm{co}K}$，则由 4.3.5(i)有 $f \in X^{*}, r \in \mathbf{R}$，使得

$$f(x) < r < f(\overline{\mathrm{co}K}).$$

因 $0 \in \overline{\mathrm{co}K}$，故 $r < 0$，从而 $f(x) < 0$. 若有 $y \in K$，使 $f(y) < 0$，则 $ty \in K(t > 0)$，$f(ty) \to -\infty (t \to \infty)$，这与 $f(K) > r$ 相矛盾. 因此 $f(K) \geqslant 0$，即 $f \in K^{+}$，这推出 $x \overline{\in} K^{++}$，于是式(12)得证. □

若 K 是闭凸锥，则(12)可写成 $X \cap K^{++} = K$. 若 K 是序锥且导入 X 中的半序 $\leqslant$，$x \in X$，则

$$x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in K^{++} \Leftrightarrow \forall f \in K^{+} : f(x) \geqslant 0.$$

这就得到判定**向量不等式**的如下一般方法：

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \forall f \in K^{+}, \quad f(x) \leqslant f(y). \tag{13}$$

这与判定**向量等式**的以下结论(依 4.3.5(iv))恰相对应：

$$x = y \Leftrightarrow \forall f \in X^{*} : f(x) = f(y).$$

以上事实表明，对偶锥起着类似于对偶空间的作用. 若 $K^{\circ} \neq \varnothing$，则有类似于(13)的以下判别法：

$$x \ll y \Leftrightarrow \forall f \in K^{+} \backslash \{0\} : f(x) < f(y). \tag{14}$$

证　显然(14)相当于

$$x \in K^{\circ} \Leftrightarrow \forall f \in K^{+} \backslash \{0\} : f(x) > 0.$$

若 $x \in K^{\circ}, 0 \neq f \in K^{+}$，则必 $f(x) \geqslant 0$. 但 $f(K^{\circ})$ 是开区间(4.3.2(ii))，故必 $f(x) > 0$. 反之，若 $x \in X \backslash K^{\circ}$，则由分离定理(4.3.4)，有 $f \in X^{*}, r \in \mathbf{R}$，使得

$$f(x) \leqslant r < f(K^{\circ}),$$

这推出 $r \leqslant f(K)$. 由 $0 \in K$ 得 $r \leqslant 0$，因而 $f(x) \leqslant 0$. 于是如同命题 5.5.7 之证，必有 $f \in K^{+}$. 可见(14)为真.

我们已在多处看到，空间 X 与 X^{*} 的性质有某些很强的对应关系(如 5.1.7, 5.2.3, 5.2.4, 5.3.10 等). 现在指明 K 与 K^{+} 之间亦有类似的对应关系.

5.5.8 定理　设 $K \subset X$ 是序锥，则以下结论成立：

(i) K 是完全的 $\Leftrightarrow K^{+}$ 是 X^{*} 中的序锥；

(ii) K 是再生的 $\Leftrightarrow K^{+}$ 是正规的；

(iii) K 是正规的 $\Leftrightarrow K^{+}$ 是再生的.

证　(i) 必定 $K^{+} \neq \{0\}$，否则由(12)有 $X = K$，这与(1)矛盾. 于是

K^+ 是序锥 $\Leftrightarrow \{0\} = K^+ \cap (-K^+) = K^\perp$

$\Leftrightarrow X = \overline{\operatorname{span} K} \Leftrightarrow K$ 是完全的．（用 4.4.5(vi)）

(ii) 若 K 是再生的，则有 $\delta > 0$，使 $\delta B \subset A$（记号依 5.5.5 之证）．设 f，$g \in X^*$ 依 K^+ 导入的序有 $0 \leqslant f \leqslant g$，则

$$\delta \| f \| = \sup f(\delta B) \leqslant \sup f(A)$$
$$\leqslant \sup f(K \cap B) \leqslant \sup g(B) = \| g \|,$$

这表明 K^+ 是正规锥（用 5.5.3(iii)）．反之，若 K 不是再生的，则由 5.5.5 之证看出 $0 \overline{\in} (\bar{A})^\circ$．于是 $\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists x_n \in n^{-1}B \backslash \bar{A}$．因 $\bar{A}$ 是闭凸集且 $0 \in \bar{A}$，故依 4.3.5(i) 有 $f_n \in X^*$，使得 $f_n(\bar{A}) < 1 < f_n(x_n)$．这推出 $\| f_n \| > n$，且 $f_n \in B^* + K^+$，$B^* = B_{X^*}$（若 $f_n \overline{\in} B^* + K^+$，则因 $B^* + K^+$ 弱*闭，由 4.3.5(i) 有 $x \in X$，使

$$f_n(x) > 1 > \hat{x}(B^* + K^+),$$

这推出 $\hat{x}(B^*) < 1$，$\hat{x}(K^+) \leqslant 0$，从而 $x \in -K \cap B \subset A$，这与 $f_n(\bar{A}) < 1$ 矛盾）．同理 $f_n \in B^* - K^+$，因而 $(B^* + K^+) \cap (B^* - K^+)$ 无界，K^+ 不是正规的（依 5.5.3(iv)）．

(iii) 的证明是类似的． □

D. Krein 定理

如在 §4.3 中指出的，Hahn-Banach 定理主要用来确立满足特定要求的泛函 $f \in X^*$ 的存在性．在半序空间理论中，确立满足一定要求的 $f \in K^+$ 存在有同样的重要性，而如下的 Krein 定理则起着类似于 Hahn-Banach 定理的作用．

5.5.9 Krein 定理 设 $A \subset X$ 是一子空间，$K \subset X$ 是一凸锥，

$$A \cap K^\circ \neq \varnothing, f \in A^*, f(A \cap K) \geqslant 0,$$

则 f 可扩张为某个 $g \in K^+$．

证 因可用如同证 4.3.3(i) 那样的扩张程序，不妨设 $X = A \oplus \mathbf{R}e$，$e \overline{\in} A$，$\| e \| = 1$．由 $A \cap K^\circ \neq \varnothing$ 有 $x_0 = A$，$\delta > 0$，使 $x_0 + \delta B \subset K$，$B = B_X$．于是

$$\pm \delta^{-1} x_0 = e \pm (\delta^{-1} x_0 \mp e) \in A \cap (e \pm K),$$

故 $A \cap (e \pm K) \neq \varnothing$．$\forall x \in A \cap (e - K)$，$y \in A \cap (e + K)$，有 $y - x \in A \cap K$，因而 $f(y - x) \geqslant 0$．于是有 $r \in \mathbf{R}$，使得（对照 §4.3(4)）

$$f(A \cap (e - K)) \leqslant r \leqslant f(A \cap (e + K)). \tag{15}$$

定义 X 上的线性泛函：

$$g(a + \lambda e) = f(a) + \lambda r \qquad (a \in A, \lambda \in \mathbf{R}),$$

则 g 是 f 的扩张．利用(15)易验证 $g(K) \geqslant 0$．由

$$g(\delta B)=g(x_0)-g(x_0+\delta B)\leqslant g(x_0)$$

推出 $g\in X^*$，因此 $g\in K^+$ 合于定理要求． □

在§4.4中，为建立关于极集与零化子的某些等式，Hahn-Banach 定理是不可缺少的．与此相对应，为建立关于对偶锥的某些等式，Krein 定理的作用是关键的．下面举出两个典型例子．

5.5.10 定理　设 $A\subset X$ 是子空间，$K\subset X$ 是凸锥，$A\cap K^\circ\neq\varnothing$，则

$$(A\cap K)^+=A^\perp+K^+ . \tag{16}$$

证　首先，由

$$\langle A\cap K,A^\perp+K^+\rangle\subset\langle A,A^\perp\rangle+\langle K,K^+\rangle$$

推出 $A^\perp+K^+\subset(A\cap K)^+$．若 $f\in(A\cap K)^+$，则对 $f\mid A$ 应用定理5.5.9得 $g\in K^+$，使得 $f\mid A=g\mid A$，即 $f-g\in A^\perp$，于是

$$f=(f-g)+g\in A^\perp+K^+,$$

这表明等式(16)成立． □

利用5.5.10可证明以下重要结果．

5.5.11 Farkas 引理　设 $K\subset Y$ 是凸锥，$T\in L(X,Y)$，$R(T)\cap K^\circ\neq\varnothing$，则有

$$T^*K^+=(T^{-1}K)^+ . \tag{17}$$

证　首先，由(用§5.1(15))

$$\langle T^{-1}K,T^*K^+\rangle=\langle TT^{-1}K,K^+\rangle\geqslant 0$$

推出 $T^*K^+\subset(T^{-1}K)^+$．其次，取定 $f\in(T^{-1}K)^+$，今证 $f\in T^*K^+$．令 $G=\{(x,Tx):x\in X\}$，则 $G\cap(X\times K)^\circ\neq\varnothing$，于是由5.5.10有

$$\begin{aligned}(G\cap(X\times K))^+&=G^\perp+(X\times K)^+\\&=G^\perp+\{0\}\times K^+ .\end{aligned}$$

易验知 $(f,0)\in(G\cap(X\times K))^+$，于是有 $g\in K^+$，使得

$$(f,0)=(f,-g)+(0,g),$$

$(f,-g)\in G^\perp$，这推出 $f=T^*g\in T^*K^+$，如所要证． □

若 Y 与 Y^* 中分别由 K 与 K^+ 导入序(都记作 $\leqslant$)，则等式(17)意味着

$$\begin{aligned}f\in T^*K^+&\Leftrightarrow\exists\, g\geqslant 0,\text{使 } T^*g=f\\&\Leftrightarrow\text{当 } Tx\geqslant 0 \text{ 时 } f(Tx)\geqslant 0\Leftrightarrow f\in(T^{-1}K)^+ .\end{aligned}$$

这又相当于，对给定的 $f\in X^*$，以下两件事等价：

(i) 线性方程 $T^*g=f$ 在 X^* 中有"非负解" g；

(ii) $\forall x\in X:Tx\geqslant 0\Rightarrow f(Tx)\geqslant 0$.

注意以上两个陈述在形式上似乎完全不同：一个是线性方程的可解性问题，而另一个则是不等式问题．但 Farkas 引理却断言它们实质上等价．这类结论经适当的具体解释后可作多种应用．

E. Banach 格

对于实函数空间的研究,所谓格运算

$$(x \vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\}$$

如同代数运算一样起重要作用．对于格运算的抽象处理,半序 Banach 空间(或更一般的半序向量空间)是一个合适的框架．

5.5.12 定义 设 $(X, \leqslant)$ 是一个半序 Banach 空间, $\forall x, y \in X$, $\sup\{x, y\}$ 存在．约定

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \qquad x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]; \tag{18}$$

$$x^+ = x \vee 0, \qquad x^- = (-x)^+ = -(x \wedge 0); \tag{19}$$

$$|x| = x \vee (-x); \tag{20}$$

x^+, x^- 与 $|x|$ 分别称为 x 的**正部、负部与绝对值**．若

$$|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\| \qquad (x, y \in X), \tag{21}$$

则称 X 为一个 **Banach 格**或 B 格．

以下设 X 是给定的 Banach 格．关于 $x \vee y, x^+, x^-$ 与 $|x|$ 有一系列关系式,它们在实函数空间中的原型是直观而自明的,而在抽象的 Banach 格中,我们只能严格地依据(8)～(20)推出．下面的命题汇集了基本的结论．

5.5.13 命题 对于 $x, y, z \in X$, 以下结论成立:

(i) 交换律: $x \vee y = y \vee x$;

(ii) 结合律: $(x \vee y) \vee z = \sup\{x, y, z\} \triangleq x \vee y \vee z$;

(iii) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$; $y \vee z = y + (z - y)^+$;

(iv) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)(\alpha \geqslant 0)$;

(v) $x + y = x \vee y + x \wedge y$;

(vi) 分配律: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(vii) $x^+ \geqslant 0$; $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x^+ = x$; $(\alpha x)^+ = \alpha x^+ \qquad (\alpha \geqslant 0)$;

(viii) Jordan 分解: $x = x^+ - x^-$;

(ix) $|x| = x^+ + x^-$, $x^{\pm} = (|x| \pm x)/2$;

(x) $|\alpha x| = |\alpha||x|$; $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(xi) $|x \vee y - x \vee z| \leqslant |y - z|$.

证 (i)～(iv)是明显的．

(v) 反复利用(iii)及(18)得出

$$\begin{aligned} x - x \wedge y &= x + [(-x) \vee (-y)] \\ &= 0 \vee (x - y) = y \vee x - y. \end{aligned}$$

(vi) 要证等式两边分别记为 a, b, 直接看出 $a \geqslant b$. 其次,

$$\begin{aligned} x+y\vee z &= (x+y)\vee(x+z) \\ &\leqslant (b+x\vee y)\vee(b+x\vee z) \\ &= b+x\vee(y\vee z) \qquad (\text{用(iii)}) \\ &= b+x+y\vee z-x\wedge(y\vee z) \qquad (\text{用(v)}), \end{aligned}$$

由此得出 $a\leqslant b$，从而 $a=b$.

(vii)是显然的，(viii)由(v)推出.

(ix) 首先由 $0=x\vee(-x)+x\wedge(-x)$ 与 $x\wedge(-x)\leqslant x\vee(-x)$ 得 $x\wedge(-x)\leqslant 0\leqslant|x|$. 其次，

$$x^+\wedge x^-=(x^+-x^-)\wedge 0+x^-=-x^-+x^-=0,$$

$$x^++x^-=x^+\vee x^-+x^+\wedge x^-=x\vee(-x)\vee 0=|x|.$$

(x) 由 $|x|\geqslant\pm x$ 有

$$|x+y|=(x+y)\vee(-x-y)\leqslant|x|+|y|,$$

其余是明显的.

(xi) 由以下计算验证：

$$\begin{aligned} &|x\vee y-x\vee z| \\ &=(x\vee y-x\vee z)\vee(x\vee z-x\vee y) \qquad (\text{用(20)}) \\ &=(x-x\vee z)\vee(y-x\vee z) \\ &\quad\vee(x-x\vee y)\vee(z-x\vee y) \qquad (\text{用(iii)}) \\ &\leqslant 0\vee(y-x\vee z)\vee(z-x\vee y) \\ &\leqslant 0\vee(y-z)\vee(z-y)=|y-z|. \end{aligned}$$

□

由对偶性，5.5.13 中的公式经互换 $\vee$ 与 $\wedge$ 之后仍保持成立.

直接由条件(21)推出以下结论：

(i) $|x|=|y|\Rightarrow\|x\|=\|y\|$，特别 $\|(|x|)\|=\|x\|$.

(ii) $|x|\leqslant y\Rightarrow\|x\|\leqslant\|y\|$.

在 Banach 格 X 中，除了考虑范数收敛之外，还可以考虑序收敛或 O-收敛，后者定义如下：设 $\{x_n\}\subset X$，$x\in X$. 若存在依序 $\leqslant$ 下降的序列 $\{b_n\}$，使得 $\inf b_n=0$（记作 $b_n\downarrow 0$）且 $|x_n-x|\leqslant b_n$，则说 $\{x_n\}$ O-收敛于 x，记作 $O\text{-}\lim\limits_n x_n=x$ 或 $x_n\xrightarrow{O}x$. 对于二重序列 x_{mn} 的 O-收敛可类似定义.

5.5.14 命题　(i) O-收敛的极限是唯一的，$x+y$ 与 $x\vee y$ 均关于 O-收敛连续.

(ii) 若 X 是 σ-完备的，即其中任何序有界序列有上确界，则 $\{x_n\}\subset X$ 为 O-收敛的充要条件是

$$O\text{-}\lim_{m,n}|x_m-x_n|=0. \tag{22}$$

证　(i) 只证 $x\vee y$ 的连续性，其余结论可类似证明. 设 $|x_n-x|\leqslant a_n$，

$|y_n - y| \leqslant b_n, a_n \downarrow 0, b_n \downarrow 0$，则

$$\begin{aligned}|x_n \vee y_n - x \vee y| &\leqslant |x_n \vee y_n - x_n \vee y| + |x_n \vee y - x \vee y| \\ &\leqslant |y_n - y| + |x_n - x| \\ &\leqslant b_n + a_n \downarrow 0,\end{aligned}$$

这表明 $x_n \vee y_n \xrightarrow{O} x \vee y$.

(ii) 若 $|x_n - x| \leqslant b_n \downarrow 0$，则

$$|x_m - x_n| \leqslant b_m + b_n \triangleq b_{mn},$$

$\{b_{mn}\}$ 关于 (m,n) 是下降的，故条件(22)满足.

其次设条件(22)满足，则有关于 (m,n) 下降的序列 $\{b_{mn}\}$，$\inf b_{mn} = 0$，$|x_m - x_n| \leqslant b_{mn}$. 由 $x_n \leqslant x_m + b_{mn}$ 推出

$$x_n \leqslant b_{mn} + \sup_{k \geqslant m} x_k \qquad (m \geqslant n),$$

于是

$$x_n \leqslant b_{mn} + \overline{\lim_m} x_m,$$

其中 $\overline{\lim_m} x_m = \inf_m \sup_{k \geqslant m} x_k$，其存在性依据 σ- 完备假设. 于是

$$x_n - \overline{\lim_m} x_m \leqslant b_{nn}.$$

类似地可证 $\overline{\lim_m} x_m - x_n \leqslant b_{nn}$，因此

$$|x_n - \overline{\lim_m} x_m| \leqslant b_{nn},$$

这表明 $O\text{-}\lim_n x_n = \overline{\lim_m} x_m$. □

注意条件(21)显然蕴涵 $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$，因而 X 中的序锥是正规的，于是 X 中的序有界集是范数有界的. 利用这一点可以证明如下命题.

5.5.15 命题　设 f 是 X 上的线性泛函，则 $f \in X^* \Leftrightarrow f$ 在序有界集上有界.

证　若 $f \overline{\in} X^*$，则有 $x_n \to 0$，而 $|f(x_n)| \geqslant 1 (\forall n \in \mathbf{N})$. 可设 $\|x_n\| < n^{-3}$，令 $y_n = nx_n$，则 $|f(y_n)| \geqslant n, y = \sum |y_n| \in X$. $f(x)$ 在序区间 $[-y, y]$ 上无界. 逆命题不必证. □

§ 5.6　Banach 空间的例子

应用上常见的 Banach 空间，大多是函数空间或序列空间，这些空间通常又是 § 4.6 中考虑的那些 TVS 的向量子空间.

A. 一致收敛空间

任给非空集 Ω，以 $B(\Omega)$ 记 Ω 上的有界(实或复)函数之全体，在 $B(\Omega)$ 上定义如下范数(称为上确界范数或 **sup 范数**)：

$$\|x\|_0 = \sup_{t\in\Omega}|x(t)| \qquad (x\in B(\Omega)), \tag{1}$$

则 $(B(\Omega), \|\cdot\|_0)$ 显然是一个 Banach 空间，其中

$$x_n \to 0 \Leftrightarrow x_n(t) \rightrightarrows 0 \qquad (n\to\infty, t\in\Omega),$$

因此称 $B(\Omega)$ 为一致收敛空间[①]或**有界函数空间**. 一些常见的 Banach 空间以有界函数空间或其子空间的形式出现.

1° 有界数列空间 m　即 $m = B(\mathbf{N})$，m 也写作 l^∞，其中的范数为

$$\|x\|_0 = \sup_i |x_i| \triangleq \|x\|_\infty \qquad (x=(x_i)\in l^\infty). \tag{2}$$

空间 l^∞ 的最值得注意的性质是其不可分性：令 $A=\{x\in l^\infty: x_i = 0 \text{或} 1\}$，则 A 是一个不可数集，而对 A 中任何相异的元 x, y 有 $\|x-y\|_\infty = 1$!

2° 连续函数空间　设 Ω 是一个紧 T_2 空间，则 $C(\Omega)$ 必为 $B(\Omega)$ 的闭子空间，因而是 Banach 空间，它是最常用的 Banach 空间之一. 下面给出关于空间 $C(\Omega)$ 的几个基本结果.

5.6.1 定理　若 Ω 是可度量化的紧 T_2 空间，则 $C(\Omega)$ 是可分的.

证　取 Ω 的可数拓扑基 $\mathscr{U}$(参考 3.3.8). 给定 $x\in C(\Omega)$ 与 $\varepsilon>0$，$\forall t\in\Omega$，取 $U_t\in\mathscr{U}$，使得 $t\in U_t$，且

$$|x(s)-x(t)| < \varepsilon \qquad (\forall s\in U_t). \tag{3}$$

取有限集 $\{t_i\}\subset\Omega$，令 $U_i = U_{t_i}$，使 $\sigma=\{U_i\}$ 覆盖 Ω；取从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解 $\Phi_\sigma = \{\varphi_i\}$ (用 2.4.4). 令 $y=\sum x(t_i)\varphi_i$，则

$$|x(t)-y(t)| = \Big|\sum_i \varphi_i(t)[x(t)-x(t_i)]\Big|$$

$$\leqslant \sum_{t\in U_i}\varphi_i(t)\,|x(t)-x(t_i)| < \varepsilon \qquad (\text{用}(3)),$$

故有 $\|x-y\|_0 < \varepsilon$. 可见形如 φ_i 的函数构成 $C(\Omega)$ 的基本集. 而这样的函数仅可数多个，故 $C(\Omega)$ 可分.　□

特别，当 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界闭子集时 $C(\Omega)$ 是可分的.

5.6.2 Arzela-Ascoli 定理　设 Ω 是紧度量空间，$A\subset C(\Omega)$，则 A 相对紧 $\Leftrightarrow$ A 一致有界(即范数有界)且**等度连续**，即

$$\begin{cases}\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in A, \forall s,t\in\Omega, \\ d(s,t)<\delta \Rightarrow |x(s)-x(t)|<\varepsilon.\end{cases} \tag{4}$$

---

① 参看 p. 137 的脚注.

证　首先设 A 相对紧．A 显然一致有界．若条件(4)不满足，则有 $\varepsilon>0$，$x_n\in A, s_n, t_n\in\Omega$，使得 $d(s_n,t_n)\to 0$，而

$$|x_n(s_n)-x_n(t_n)|\geqslant\varepsilon.$$

因 A 相对紧而 Ω 是紧的，不妨设 $x_n\rightrightarrows x\in C(\Omega), s_n\to t\in\Omega, t_n\to t(n\to\infty)$．但这推出

$$\begin{aligned}\varepsilon\leqslant&|x_n(s_n)-x(s_n)|+|x(s_n)-x(t_n)|\\&+|x(t_n)-x_n(t_n)|\to 0\qquad(n\to\infty),\end{aligned}$$

得出矛盾．因此 A 必等度连续．

反之，设 A 一致有界且等度连续．取定序列 $\{x_n\}\subset A$ 与 Ω 的可数稠子集 $\{t_n\}$（用命题 3.3.6）．因 $\{x_n(t_1)\}$ 有界，故可选出收敛子列 $\{x_n^1(t_1)\}$，继而从 $\{x_n^1(t_2)\}$ 中取出收敛子列 $\{x_n^2(t_2)\}$，…，如此得到无限多个子列 $\{x_n^k\}(k=1,2,\cdots)$，其**对角线序列** $\{y_n=x_n^n:n\in\mathbf{N}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，它在集 $\{t_k\}$ 上收敛．由不等式

$$\begin{aligned}|y_m(t)-y_n(t)|\leqslant&|y_m(t)-y_m(t_k)|+|y_m(t_k)-y_n(t_k)|\\&+|y_n(t_k)-y_n(t)|\end{aligned}$$

与条件(4)推出 $\{g_n\}$ 是 $C(\Omega)$ 中的 Cauchy 列，故 A 相对紧．□

5.6.2 是解决许多紧性判定问题（不限于空间 $C(\Omega)$ 中）的基础，有着广泛的应用，就在本书中也多处用到它（参看 4.6.2，5.1.19，5.6.5）．

关于 $C(\Omega)$ 上的有界线性泛函，有属于 Riesz 的如下著名表示定理．

5.6.3 定理　$C(\Omega)^*=M(\Omega)$（此处 $M(\Omega)$ 是 Ω 上的有界正则 Borel 测度的空间），这意味着，$f\in C(\Omega)^*$ 有通式

$$f(x)=\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu\qquad(x\in C(\Omega)),\tag{5}$$

其中 $\mu\in M(\Omega)$ 由 f 唯一决定且 $\|\mu\|=\|f\|$．

以上定理的证明需要一些测度论的知识，参看[17，Th. 3.5.5]．定理 5.6.3 也是证明其他一些表示定理的基础．

利用 5.6.3，很容易解决 $C(\Omega)$ 中弱收敛的刻画问题．

5.6.4 命题　在 $C(\Omega)$ 中 $x_n\rightharpoonup 0\Leftrightarrow\sup\limits_n\|x_n\|_0<\infty$ 且 $x_n(t)\to 0(n\to\infty,\forall t\in\Omega)$，换言之，对于 $C(\Omega)$ 中的有界序列而言，弱收敛即点态收敛．

证　设 $x_n\rightharpoonup 0$，则 $\{x_n\}$ 必有界．$\forall t\in\Omega$，定义 $f_t(x)=x(t)(x\in C(\Omega))$，则显然 $f_t\in C(\Omega)^*$，于是 $x_n(t)=f_t(x_n)\to 0(n\to\infty)$．反之，设 $\{x_n\}$ 有界且点态收敛于零，则由控制收敛定理有

$$\lim_n\int_\Omega x_n(t)\mathrm{d}\mu=0\qquad(\forall\mu\in M(\Omega)),$$

这结合 5.6.3 得出 $x_n\rightharpoonup 0$．□

5.6.3 结合 4.4.5(ii)得出如下有趣结论：若 $\{x_n\} \subset C(\Omega)$ 一致有界且点态收敛于 $x \in C(\Omega)$，则必有 $\{y_n\} \subset \mathrm{co}\{x_n\}$，使得 $y_n(t) \rightrightarrows x(t)(n \to \infty, t \in \Omega)$.

3° 收敛数列空间　设 $\Omega = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$，$\Omega$ 作为 $\mathbf{N}$ 的一点紧化是一个紧 T_2 空间(参考 2.2.15)，因而 $C(\Omega)$ 是一个可分 Banach 空间，通常记作 c. 每个 $x \in c$ 可写成 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_\infty\}$，其中 $x_\infty = \lim\limits_n x_n$. 因此，$c$ 实际上就是收敛数列的空间，它也可看作 l^∞ 的闭子空间．分别由 5.6.2～5.6.4 推出以下结论：

(i) $A \subset c$ 相对紧 $\Leftrightarrow A$ 有界且依以下意义一致收敛：

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A$，有 $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$.

(ii) $c^* = l^1$，这意味着 $f \in c^*$ 有通式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \qquad (x = (x_n) \in c),$$

其中 $x_0 = x_\infty$，$y = (y_n)$ 由 f 唯一决定，且

$$\|f\| = \|y\|_1 = \sum_0^\infty |y_n|.$$

事实上，$y \in l^1$ 唯一决定一个 $\mu \in M(\Omega)$，使得 $\mu(\{n\}) = y_n (n \in \mathbf{N})$，$\mu(\{\infty\}) = y_0$，$\|\mu\| = \|y\|_1$.

(iii) 在 c 中 $x^{(k)} \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow \{x^{(k)}\}$ 有界且 $x_n^{(k)} \to 0 (k \to \infty, \forall n \in \mathbf{N})$.

若令 $c_0 = \{x \in c : x_n \to 0\}$，则 c_0 是 c 的闭子空间．可以证明 $c_0^* = l^1$. 若令 $e_i = (\delta_{ij} : j \in \mathbf{N})$，$e = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$，则 $\{e_i : i \in \mathbf{N}\}$ 是 c_0 的可数基，$\{e, e_i : i \in \mathbf{N}\}$ 是 c 的可数基．

B. 可微函数空间

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一有界闭区域，$m \in \mathbf{Z}_+$，则 $C^m(\Omega)$ 依范数

$$\|u\|_m = \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha u(x)| \qquad (u \in C^m(\Omega)) \tag{6}$$

是一个 Banach 空间(参照 §4.6(4))．注意范数 $\|u\|_m$ 可改写成：

$$\|u\|_m = \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_0, \tag{6'}$$

因此，在 $C^m(\Omega)$ 中 $u_k \to 0 \Leftrightarrow$ 在 $C(\Omega)$ 中 $\partial^\alpha u_k \to 0 (|\alpha| \leqslant m)$，即

$$u_k \to 0 \Leftrightarrow \partial^\alpha u_k(x) \rightrightarrows 0 \qquad (k \to \infty, |\alpha| \leqslant m, x \in \Omega). \tag{7}$$

为简便起见，将由(7)表达的收敛称为 **C^m 收敛**. 当 $\|u_k - u\|_m \to 0 (k \to \infty)$ 时说 u_k C^m 逼近 u，或 u_k 是 u 的一个 **C^m 近似**．当 $m = 0$ 时，$C^0(\Omega) = C(\Omega)$ 就是连续函数空间．

以 N 记满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ 之个数，任给 $v = (v^\alpha) \in C(\Omega)^N$，定义

$$\| v \| = \max_{|\alpha| \leqslant m} \| v^{\alpha} \|_0 ,$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $C(\Omega)^N$ 上的一个积范数(参看§1.5(9)). 于是

$$C^m(\Omega) \to C(\Omega)^N, \qquad u \to (\partial^{\alpha} u)_{|\alpha| \leqslant m} \tag{8}$$

是一个等距嵌入,因而 $C^m(\Omega)$ 可看作 $C(\Omega)^N$ 的闭子空间. 利用这一事实,可直接从 $C(\Omega)$ 的已知性质推出关于 $C^m(\Omega)$ 的相应结论. 这样,可以毫不费力地写出如下定理.

5.6.5 定理 对于函数空间 $C^m(\Omega)$ 以下结论成立:

(i) $C^m(\Omega)$ 是可分的.

(ii) 设 Ω 是凸集,则 $A \subset C^m(\Omega)$ 相对紧的充要条件是:当 $|\alpha| \leqslant m$ 时, $A_{\alpha} \triangleq \{\partial^{\alpha} u : u \in A\}$ 一致有界,当 $|\alpha| = m$ 时 A_{α} 等度连续.

(iii) $f \in C^m(\Omega)^*$ 有通式

$$f(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u(x) \mathrm{d}\mu_{\alpha} \qquad (u \in C^m(\Omega)), \tag{9}$$

其中 $\mu_{\alpha} \in M(\Omega)$ 由 f 决定.

(iv) 在 $C^m(\Omega)$ 中 $u_k \rightharpoonup 0 \Leftrightarrow \sup_k \| u_k \|_m < \infty$ 且 $\partial^{\alpha} u_k(x) \to 0 (k \to \infty, |\alpha| \leqslant m, x \in \Omega)$.

唯一值得说明的是(ii). 设(ii)的条件满足 $|\alpha| < m$, 则由中值定理有

$$| \partial^{\alpha} u(x) - \partial^{\alpha} u(y) | = \left| \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \partial^{\alpha} u(\tilde{x}) (x_i - y_i) \right|$$
$$\leqslant \| u \|_m \sum_i | x_i - y_i |,$$

这推出 A_{α} 等度连续,因而在 $C(\Omega)$ 中相对紧(用定理 5.6.2). 于是由 Tychonoff 定理知 $\prod_{|\alpha| \leqslant m} A_{\alpha}$ 在 $C(\Omega)^N$ 中相对紧(用 2.2.3(ii)),这显然推出 A 在 $C^m(\Omega)$ 中相对紧.

C. 空间 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

给定测度空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, 设 $\mu\Omega > 0$. 下面提到 Ω 上的函数 $x(\cdot)$ 时,总假定 $x(\cdot)$ 在 Ω 上几乎处处有限且可测,几乎处处相等的函数不加区别. 设 $1 \leqslant p = q/(q-1) \leqslant \infty, p = 1 \Leftrightarrow q = \infty, p = \infty \Leftrightarrow q = 1$. 定义

$$\| x \|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} | x(t) |^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \inf\limits_{A \subset \Omega, \mu(\Omega \setminus A) = 0} \sup\limits_{t \in A} | x(t) |, & p = \infty, \end{cases} \tag{10}$$

$$L^p(\Omega) = \{ x : \| x \|_p < \infty \},$$

$L^p(\Omega)$ 也写作 $L^p(\Omega, \mu)$ 或 L^p, 称 $\| x \|_p$ 为 x 的 **L^p 范数**. 当 $x \in L^p$ 时称 x 为 **p 次可积函数**(若 $p < \infty$)或**本性有界函数**(若 $p = \infty$). 约定

$$x_n \xrightarrow{L^p} x \Leftrightarrow \| x_n - x \|_p \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

当 $x_n \xrightarrow{L^p} x$ 时说 $\{x_n\}$ **p 次平均收敛**于 x（若 $p < \infty$）. 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$，则在未作说明时总认定 $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, m)$，$m$ 是 n 维 Lebesgue 测度. 若 Ω 是任意非空集，μ 是 Ω 上的计数测度，则约定 $L^p(\Omega, \mu) = l^p(\Omega)$，特别令 $l^p = l^p(\mathbf{N})$，l^∞ 就是已提到的有界数列空间 m.

5.6.6 命题 $L^p(\Omega)$ 是一 Banach 空间.

证 用初等的方法可建立 **Hölder 不等式**：

$$\int_\Omega |x(t)y(t)| \, d\mu \leqslant \| x \|_p \| y \|_q. \tag{11}$$

利用(11)易验证 $\| \cdot \|_p$ 满足三角不等式. 其次，直接由定义式(10)看出 $\| \cdot \|_p$ 是齐次的与正定的，因此 $\| \cdot \|_p$ 是一个范数. 下面证完备性. 只考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情况，$p = \infty$ 的情况并无困难. 设 $\{x_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列，则可取出子列 $\{x_{n_k}\}$，使得

$$\sum_k \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \|_p < \infty$$

（参看 4.6.4 之证）. 记 $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$，则

$$\left\| \sum_k |y_k| \right\|_p = \lim_m \left\| \sum_{k=1}^m |y_k| \right\|_p \quad \text{（用 Levi 定理）}$$

$$\leqslant \lim_m \sum_{k=1}^m \| y_k \| < \infty,$$

这推出 $\sum_k |y_k| < \infty$，a. e. . 因此 $\{x_{n_k}\}$ 在 Ω 上几乎处处收敛，设 $x_{n_k} \to x$，a. e.，则由 Fatou 定理有

$$\varlimsup_n \| x_n - x \|_p \leqslant \varlimsup_n \varliminf_k \| x_n - x_{n_k} \|_p$$

$$\leqslant \lim_{m,n} \| x_n - x_m \|_p = 0,$$

这表明 $x \in L^p$ 且 $x_n \xrightarrow{L^p} x$. 完备性得证. □

鉴于 $L^p(\Omega)$ 中的函数大都性质很“坏”，一件很重要的事情是从中挑选少数较“好”的函数构成基本集，这件事的解决依赖于 Ω 的具体特性.

5.6.7 定理 设 $1 \leqslant p < \infty$，

(i) $\{\chi_A : A \in \mathscr{A}, \mu A < \infty\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 的基本集.

(ii) 若 Ω 是 LCH，μ 是 Ω 上的正则 Borel 测度，则 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

(iii) 若 Ω 是第二可数的 LCH，μ 是 Ω 上的正则 Borel 测度，则存在 $C_0(\Omega)$ 的可数子集 B，B 是 $L^p(\Omega)$ 的基本集，因而 $L^p(\Omega)$ 可分.

(iv) 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为开集，则 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

证 (i) 相当于简单函数在 $L^p(\Omega)$ 中稠密,而这是明显的.

(ii) 只要证明:每个形如 $\chi_A(A\in\mathscr{A},\mu A<\infty)$ 的函数可用 $C_0(\Omega)$ 中的函数 L^p 逼近. $\forall\varepsilon>0$,取开集 $V\supset A$,紧集 $K\subset V$,使得 $\mu(V\backslash A)<\varepsilon,\mu(V\backslash K)<\varepsilon$. 由 2.2.12(ii),有 $\varphi\in C_0(\Omega)$,使得 $K\prec\varphi\prec V$,则

$$\int_\Omega|\varphi-\chi_A|^p\mathrm{d}\mu\leqslant\mu(V\backslash(A\cap K))<2\varepsilon,$$

由此得出所要结论.

(iii) 取由相对紧开集组成的可数拓扑基 $\mathscr{U}$. 设 A,V,K,ε 如(ii)之证,取有限族 $\sigma=\{U_i,V_i\}\subset\mathscr{U}$,使得 $K\subset\bigcup U_i,\overline{U}_i\subset V_i\subset V$;取 $\varphi_\sigma\in C_0(\Omega)$,使 $\bigcup U_i\prec\varphi_\sigma\prec\bigcup V_i$,则亦有 $K\prec\varphi_\sigma\prec V$,于是同样得到 $\|\varphi_\sigma-\chi_A\|<(2\varepsilon)^{1/p}$,而这样的 φ_σ 只有可数多个.

(iv) 的证明要求更多的分析工具,从略.

5.6.8 定理 设 μ 是 σ-有限测度,$1\leqslant p<\infty$,则 $L^p(\Omega)^*=L^q(\Omega)$,这意味着 $f\in L^p(\Omega)^*$ 有通式

$$f(x)=\int_\Omega x(t)y(t)\mathrm{d}\mu\qquad(x\in L^p(\Omega)),\tag{12}$$

其中 $y\in L^q(\Omega)$ 由 f 唯一决定且 $\|y\|_q=\|f\|$.

此定理的证明要用到一些测度论知识,参看[17 ,Th. 3.5.4].

5.6.9 推论 设 $1<p<\infty$,则在 $L^p(\Omega)$ 中 $x_n\rightharpoonup 0$ 的充要条件是:$\sup\limits_n\|x_n\|_p<\infty$,且对任给 $A\in\mathscr{A},\mu A<\infty$ 有

$$\lim_n\int_A x_n\mathrm{d}\mu=0.$$

证 注意到 $\{\chi_A:A\in\mathscr{A},\mu A<\infty\}$ 是 $L^q(\Omega)$ 的基本集(5.6.7(i)),所要结论由 5.1.5 与 5.6.8 推出. □

5.6.10 定理 $L^p(\Omega)(1<p<\infty)$ 是一致凸空间.

证 只考虑 $p>2$ ($p=2$ 显然不必考虑,$1<p<2$ 时可用一类似论证).关键在于推广中线公式(§5.8(1))为

$$\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p\leqslant 2^{p-1}(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p).\tag{13}$$

(13)显然蕴涵了一致凸条件(§5.3(3)). 将(13)两端表为积分,看出只需证如下初等不等式:

$$|\xi+\eta|^p+|\xi-\eta|^p\leqslant 2^{p-1}(|\xi|^p+|\eta|^p)\qquad(\xi,\eta\in\mathbf{C},p>2).$$

证明方法是初等的,下面只写出主要线索. 用微分法易验证 $\mathbf{K}^n$ 中的 L^p 范数对 p 单调减,因此

$$(|\xi+\eta|^p+|\xi-\eta|^p)^{1/p}\leqslant(|\xi+\eta|^2+|\xi-\eta|^2)^{1/2}.$$

于是

$$\begin{aligned}|\xi+\eta|^p+|\xi-\eta|^p &\leqslant (|\xi+\eta|^2+|\xi-\eta|^2)^{p/2} \\ &= 2^{p/2}(|\xi|^2+|\eta|^2)^{p/2} \\ &\leqslant 2^{p/2}(|\xi|^p+|\eta|^p)(1+1)^{p/2-1} \\ &\leqslant 2^{p-1}(|\xi|^p+|\eta|^p),\end{aligned}$$

其中用了 Hölder 不等式．□

关于 $L^p(\Omega)$ 的所有结果当然可用于其特例 l^p，且可表述得更简单．任给 $x=(x_i)\in l^p$，依(10)有

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum\limits_i |x_i|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty, \\ \sup\limits_i |x_i|, & p=\infty.\end{cases}$$

若 $1\leqslant p<\infty$，则 $(l^p)^*=l^q$，这意味着 $f\in(l^p)^*$ 有通式

$$f(x)=\sum_i x_i y_i \qquad (x=(x_i)\in l^p),$$

其中 $y=(y_i)\in l^q$ 由 f 决定，$\|y\|_q=\|f\|$．若 $1<p<\infty$，则在 l^p 中 $x_n\rightharpoonup 0$ 的充要条件是：$\sup\limits_n\|x^n\|_p<\infty$ 且 $x_i^n\to 0(n\to\infty,\forall i\in\mathbf{N})$，$l^p(1<p<\infty)$ 是一致凸空间．

空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 的一个突出优点是，它有一个极简单的可数基 $\{e_i\}$，即 $e_i=(\delta_{ij}:j\in\mathbf{N})$．因而可方便地应用可数基空间中的一些结果，例如，由 5.4.6 推出：$A\subset l^p$ 相对紧 $\Leftrightarrow A$ 有界且关于 $x\in A$ 一致地有 $\sum_n^\infty|x_i|^p\to 0(n\to\infty)$，在 l^p 中 $x^n\to x\Leftrightarrow x_i^n\to x(n\to\infty,\forall i\in\mathbf{N})$ 且关于 n 一致地有 $\sum_m^\infty|x_i^n|^p\to 0(m\to\infty)$.

D. Sobolev 空间

前两段讨论的空间 $C^m(\Omega)$ 与 $L^p(\Omega)$，虽然都属于应用上最重要的函数空间，但两者各有一些明显的缺点．空间 L^p 的主要缺点是，它完全不涉及函数的导数．即使 $u\in L^p$ 可微，u 的导数在 L^p 范数 $\|u\|_p$ 的定义中也完全不起作用，因而 L^p 距离 $\|u-v\|_p$ 完全不能反映 u 与 v 的导数之间的差别．因此，在涉及微分的问题(如微分方程)中，空间 L^p 难以充分发挥作用．空间 C^m 虽然没有 L^p 的上述缺点，但其空间结构却不能令人满意，例如，它不像空间 $L^p(1<p<\infty)$ 那样是一致凸的、自反的，更不像空间 L^2 那样是 Hilbert 空间. 值得注意的是，空间 L^p 与 C^m 恰好优势互补. 如果一种空间能综合两者的优点，就必能避免两者的缺点．这样一种理想的函数空间，就是下面要介绍的 Sobolev 空间，它是俄罗斯数学家 Sobolev 在研究数学物理问题时首先引入的.

以下给定 $p \in [1,\infty)$，$m \in \mathbf{Z}_+$，开区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. $\forall u \in C^m(\Omega)$，令

$$\| u \|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| \partial^\alpha u \|_p^p \Big)^{1/p}, \tag{14}$$

其中 $\partial^\alpha u$ 依 §4.6(5). 令 $S = \{u \in C^m(\Omega) : \| u \|_{m,p} < \infty\}$，则直接看出 $(S, \| \cdot \|_{m,p})$ 是一个赋范空间，因而其完备化是一个 Banach 空间，记作 $H^{m,p}(\Omega)$，称为 **Sobolev 空间**. 特别，若取 $p = 2$，则 S 是一个内积空间，其中的内积为

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle \qquad (u, v \in S), \tag{15}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 记 $L^2(\Omega)$ 中的内积. 于是 $H^{m,2}(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间，通常简写作 $H^m(\Omega)$.

5.6.11 命题 对任给 $u \in H^{m,p}(\Omega)$，存在唯一函数组 $\{u^\alpha : |\alpha| \leqslant m\} \subset L^p(\Omega)$，使得若 $\{u_k\} \subset S$ 且 $u_k \to u$，则

$$\partial^\alpha u_k \xrightarrow{L^p} u^\alpha \qquad (k \to \infty,\ |\alpha| \leqslant m). \tag{16}$$

证 取定 $u \in H^{m,p}(\Omega)$. 由 $H^{m,p}(\Omega)$ 的定义，必有 $\{u_k\} \subset S$，使得 $u_k \to u(k \to \infty)$. 因 $\{u_k\}$ 是 S 中的 Cauchy 列，而

$$\| \partial^\alpha u_k - \partial^\alpha u_l \|_p \leqslant \| u_k - u_l \|_{m,p} \qquad (|\alpha| \leqslant m),$$

故 $\{\partial^\alpha u_k\}(|\alpha| \leqslant m)$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列，于是有 $u^\alpha \in L^p(\Omega)$，使(16)成立. 若 $\{v_k\} \subset S, v_k \to u$，令 $\{w_k\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots\}$，则 $w_k \to u$，于是从 $\{\partial^\alpha w_k\}(|\alpha| \leqslant m)$ 均为 L^p 收敛推出

$$\partial^\alpha v_k \xrightarrow{L^p} u^\alpha \qquad (k \to \infty,\ |\alpha| \leqslant m),$$

这表明 $\{u^\alpha : |\alpha| \leqslant m\}$ 与 $\{u_k\}$ 的选择无关. □

设 u, u^α 依 5.6.11，则约定称 u^α 为 u 的 α 阶**广义导数**，记作 $\partial^\alpha u$，它几乎处处由 u 唯一确定. 自然，u^0 即等同于 u. 仍以 $\| \cdot \|_{m,p}$ 记 $H^{m,p}$ 中的范数，设 u，u_k 如 5.6.11 之证，则

$$\| u \|_{m,p} = \lim_k \| u_k \|_{m,p} = \lim_k \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| \partial^\alpha u_k \|_p^p \Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| \partial^\alpha u \|_p^p \Big)^{1/p},$$

这就表明，范数公式(14)适用于任何 $u \in H^{m,p}(\Omega)$，只是其中的 $\partial^\alpha u$ 应理解为广义导数. 当 $u \in C^m(\Omega)$ 时，$\partial^\alpha u(|\alpha| \leqslant m)$ 显然重合于通常的偏导数.

以 N 记满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ 之个数，任给 $v = (v^\alpha) \in L^p(\Omega)^N$，定义

$$\| v \| = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| v^\alpha \|_p^p \Big)^{1/p},$$

则 $\| \cdot \|$ 是 $L^p(\Omega)^N$ 上的一个积范数(参考 §1.5(9)). 于是，如同(8)一样有等距嵌入

$$H^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)^N,\qquad u\to(\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leqslant m},\tag{17}$$

因而 $H^{m,p}(\Omega)$ 可看作 $L^p(\Omega)^N$ 的闭子空间. 这就可直接从 $L^p(\Omega)$ 的性质推出空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 的某些相应性质,例如,我们可断言:

(i) $H^{m,p}(\Omega)$ 是可分 Banach 空间.

(ii) $f\in H^{m,p}(\Omega)^*$ 有通式

$$f(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega(\partial^\alpha u)v^\alpha \mathrm{d}x\qquad(u\in H^{m,p}(\Omega)),$$

其中 $v=(v^\alpha)\in L^q(\Omega)^N$ 由 f 唯一决定, $q=p/(p-1)$.

(iii) 若 $1<p<\infty$, 则 $H^{m,p}(\Omega)$ 是自反空间.

由此可见,Sobolev 空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 继承了空间 $L^p(\Omega)$ 的一些主要性质. 另一方面, $H^{m,p}(\Omega)$ 相对于 $L^p(\Omega)$ 有一个明显的优势:每个 $u\in H^{m,p}(\Omega)$ 都可用 C^m 函数逼近,而且这种逼近蕴涵直到 m 阶导数的 L^p 逼近. 就此而言,空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 与 $C^m(\Omega)$ 可相对照.

对于某些分析问题,存在 C_0^∞ 函数的逼近将带来极大方便,而为此应考虑空间 $H_0^{m,p}(\Omega)$, 它是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包. $H_0^{m,p}(\Omega)$ 显然是一个 Banach 空间,而 $H_0^m(\Omega)\triangleq H_0^{m,2}(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间. 上述空间概称为 Sobolev 空间.

空间 $H_0^m(\Omega)$ 的一个突出优点是,在其中可考虑一个形式上较简单的等价范数,这基于以下结果:

5.6.12 Poincaré 不等式 设 Ω 有界,则对 $u\in H_0^m(\Omega)$ 有

$$\|u\|_{m,2}\leqslant\mathrm{const}\Big(\sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_2^2\Big)^{1/2}.\tag{18}$$

证 显然只需对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 证(18),不妨设 $\Omega\subset(0,a)^n$, $(0,a)^n$ 是边长为 a 的 n 维方体,于是

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u(x)|^2\mathrm{d}x&=\int_\Omega\left|\int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant a\int_\Omega\mathrm{d}x\int_0^a\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2\mathrm{d}x_1\qquad(\text{用 Schwarz 不等式})\\&\leqslant a\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x\\&=a^2\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将所得不等式相继用于 $\partial^\alpha u(|\alpha|<m)$, 即可得要证不等式(18). □

E. 有界测度空间 $M(\Omega)$

今考虑由 Ω 上的一定广义测度构成的 Banach 空间 $M(\Omega)$, 依 Ω 结构的

不同，它自然地分为两种情况．

首先设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 是任一可测空间．为陈述简便，当 $A=\bigcup A_i$ 是一可数不交并且 $A_i\in\mathscr{A}$ 时称它为 A 的一个**分解**．若一集函数 $\nu:\mathscr{A}\to\mathbf{K}$ 是 σ 可加的，即对任何分解 $A=\bigcup A_i$ 有 $\nu A=\sum\nu A_i$，则称 ν 为 $\mathscr{A}$ 或 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的一个**有界测度**（实测度或复测度）. Ω 上的有界测度之全体记作 $M(\Omega)$，与此相区别，Ω 上的通常测度称为正测度．显然 $M(\Omega)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的向量空间．任给 $A\in\mathscr{A}$，令

$$|\nu|(A)=\sup\Big\{\sum_i|\nu A_i|:A=\bigcup A_i\text{ 是分解}\Big\},\tag{19}$$

则 $|\nu|$ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个有限正测度，它满足

$$|\nu(A)|\leqslant|\nu|(A)\qquad(A\in\mathscr{A}),$$

且是 $\mathscr{A}$ 上有此性质的最小正测度．

5.6.13 命题 $M(\Omega)$ 依范数 $\|\nu\|=|\nu|(\Omega)$ 是一个 Banach 空间．

证 验证 $\|\nu\|$ 为范数是平凡的，只要证完备性．设 $\{\nu_n\}\subset M(\Omega)$ 是一 Cauchy 列．$\forall\varepsilon>0$，取 $n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$|\nu_nA-\nu_mA|\leqslant\|\nu_n-\nu_m\|<\varepsilon\qquad(n,m\geqslant n_0,A\in\mathscr{A}).\tag{20}$$

(20)推出存在有限极限 $\nu A=\lim\limits_n\nu_nA\,(A\in\mathscr{A})$. 任给分解 $A=\bigcup A_i$，由(20)有

$$\sum_{i=1}^k|\nu_nA_i-\nu_mA_i|\leqslant\|\nu_n-\nu_m\|<\varepsilon\qquad(m,n\geqslant n_0).$$

首先令 $m\to\infty$，然后令 $k\to\infty$，得

$$\sum_i|\nu_nA_i-\nu A_i|\leqslant\varepsilon\qquad(\forall n\geqslant n_0),\tag{21}$$

这推出 $\sum|\nu A_i|\leqslant\sum|\nu_nA_i|+\varepsilon<\infty$. 于是

$$\Big|\nu A-\sum_i\nu A_i\Big|\leqslant|\nu A-\nu_nA|+\varepsilon\qquad(\text{用}(21)),$$

这推出 $\nu A=\sum\nu A_i$，故 $\nu\in M(\Omega)$. 取 $A=\Omega$ 从(21)得 $\|\nu_n-\nu\|\leqslant\varepsilon(\forall n\geqslant n_0)$，这表明 $\nu_n\to\nu(n\to\infty)$. □

取定 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的正测度 μ. $\forall\nu\in M(\Omega)$，约定 $\nu\ll\mu\Leftrightarrow$ 当 $\mu A=0$ 时 $\nu A=0$. 显然 $\nu\ll\mu\Leftrightarrow|\nu|\ll\mu$. 若令 $M_\mu(\Omega)=\{\nu\in M(\Omega):v\ll\mu\}$，则 $M_\mu(\Omega)$ 是 $M(\Omega)$ 的一个闭子空间．任给 $x\in L^1(\Omega,\mu)$，令

$$\nu_x(A)=\int_Ax(t)\mathrm{d}\mu\qquad(A\in\mathscr{A}),\tag{22}$$

则直接看出 $\nu_x\in M_\mu(\Omega)$.

5.6.14 命题 设 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是一个 σ- 有限测度空间，则 $L^1(\Omega,\mu)\to M_\mu(\Omega)$，$x\to\nu_x$ (ν_x 依(22))是一等距同构．

证 映射 $x\to\nu_x$ 显然是线性的．取定 $x\in L^1(\Omega,\mu)$，任给分解 $\Omega=\bigcup A_i$，有

$$\sum_i |\nu_x(A_i)| = \sum_i \left|\int_{A_i} x\mathrm{d}\mu\right|$$
$$\leqslant \sum_i \int_{A_i} |x| \mathrm{d}\mu = \|x\|_1,$$

这推出 $\|\nu_x\| \leqslant \|x\|_1$. 另一方面，$\forall \varepsilon > 0$，取简单函数 $\varphi = \sum \alpha_i \chi_{e_i}$，使 $\|\varphi - x\|_1 < \varepsilon$，可设 $\Omega = \bigcup e_i$ 是一分解，则

$$\|x\|_1 - \varepsilon < \|\varphi\|_1 = \sum_i |\alpha_i| \mu e_i$$
$$= \sum_i |\nu_\varphi(e_i)| \leqslant \|\nu_\varphi\|$$
$$\leqslant \|\nu_x\| + \|\nu_\varphi - \nu_x\|$$
$$< \|\nu_x\| + \varepsilon,$$

这推出 $\|x\|_1 \leqslant \|\nu_x\|$. 因此 $x \to \nu_x$ 是一等距映射.

余下只要证，每个 $\nu \in M_\mu(\Omega)$ 必可表为 $\nu = \nu_x, x \in L^1(\Omega,\mu)$. 为简单起见，下面只考虑 μ 有限的情况. 定义

$$f(x) = \int_\Omega x(t)\mathrm{d}|\nu| \qquad (x \in L^1(\Omega, |\nu|)).$$

令 $\lambda = |\nu| + \mu$，则 $|f(x)| \leqslant \lambda(\Omega)^{1/2} \|x\|_{L^2(\lambda)}$（用 Schwarz 不等式）. 由 5.6.8，有 $g \in L^2(\Omega,\lambda)$，使得

$$\begin{cases} \int_\Omega x\mathrm{d}|\nu| = \int_\Omega xg\mathrm{d}\lambda, \\ \int_\Omega (1-g)x\mathrm{d}|\nu| = \int_\Omega xg\mathrm{d}\mu. \end{cases} \tag{23}$$

以 $x = \chi_A$ 代入(23)得 $|\nu|(A) = \int_A g\mathrm{d}\lambda \leqslant \lambda(A) (A \in \mathscr{A})$，这推出 $0 \leqslant g \leqslant 1$，$\lambda$-a. e.. 令 $Q = \{g = 1\}$，则由(23)推出 $\mu Q = 0$，从而 $|\nu|(Q) = 0$. $\forall A \in \mathscr{A}$，有

$$|\nu|(A) = |\nu|(A\backslash Q) = \int_A \lim_n (1-g^n)\mathrm{d}|\nu|$$
$$= \lim_n \int_\Omega (1-g)(1+g+\cdots+g^n)\chi_A \mathrm{d}|\nu| \qquad (\text{用 Levi 定理})$$
$$= \lim_n \int_A (g+g^2+\cdots+g^n)\mathrm{d}\mu \qquad (\text{用}(23)),$$

这表明

$$|\nu|(A) = \int_A h\mathrm{d}\mu, \qquad h = \sum_{n=1}^\infty g^n \in L^1(\Omega,\mu). \tag{24}$$

任给简单函数 $\varphi = \sum \alpha_i \chi_{e_i}$，令 $T\varphi = \sum \alpha_i \nu(e_i)$，可设 $\Omega = \bigcup e_i$ 是一分解，则

$$\begin{aligned} |T\varphi| &\leqslant \sum_i |\alpha_i| |\nu(e_i)| \\ &\leqslant \left(\sum_i |\alpha_i|^2 |\nu|(e_i)\right)^{1/2} \left(\sum_i |\nu|(e_i)\right)^{1/2} \\ &\leqslant \|\varphi\|_{L^2(|\nu|)} \|\nu\|^{1/2}. \end{aligned}$$

由 Hahn-Banach 定理，可设 $T \in L^2(\Omega, |\nu|)^*$，于是有 $\psi \in L^2(\Omega, |\nu|)$，使 $T\varphi = \int_\Omega \varphi\psi \mathrm{d}|\nu|$. 取 $\varphi = \chi_A$ 得

$$\nu A = T\chi_A = \int_A \psi \mathrm{d}|\nu|. \tag{25}$$

用一标准的积分论证可用(24)建立等式

$$\int_A \psi \mathrm{d}|\nu| = \int_A \psi h \mathrm{d}\mu,$$

这结合(25)得 $\nu A = \int_A x \mathrm{d}\mu, x = \psi h \in L^1(\Omega,\mu)$，如所要证. □

依 5.6.4，可以认为 $L^1(\Omega,\mu) \subset M(\Omega)$. 通常将 $x \in L^1(\Omega,\mu)$ 写作 $\mathrm{d}\nu = x\mathrm{d}\mu$，此处 $\nu = \nu_x$. 这样，空间 $M(\Omega)$ 是函数空间 $L^1(\Omega)$ 的一个自然扩充.

任给 $\nu \in M(\Omega)$，必有 $\psi \in L^1(\Omega, |\nu|)$ 使(25)成立，且由 $|\nu A| \leqslant |\nu|(A)$ 与(25)可推出 $|\psi| \leqslant 1$, $|\nu|$-a.e.，实际上有 $|\psi| = 1$, $|\nu|$-a.e.. $\forall x \in L^1(\Omega, |\nu|)$，定义

$$\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\nu = \int_\Omega x\psi \mathrm{d}|\nu|. \tag{26}$$

下面设 Ω 是一个 LCH，$\mathscr{B}$ 是 Ω 中的 Borel 集之全体. 若 $\mathscr{B}$ 上的测度 μ 满足以下条件：

(i) 任给紧集 $K \subset \Omega$，有 $\mu K < \infty$；

(ii) $\forall B \in \mathscr{B}$，有 $\mu B = \inf\{\mu U : U \supset B 是开集\}$，

则称 μ 为 Ω 上的**正则 Borel 测度**. 若 ν 是 Ω 上的有界测度，$|\nu|$ 是正则 Borel 测度，则称 ν 为 Ω 上的正则有界测度. 若重新约定 $M(\Omega)$ 是 Ω 上的正则有界测度之全体，则仍可验证它是一个 Banach 空间.

设 Ω 是一个紧 T_2 空间. 任给 $\nu \in M(\Omega)$，定义

$$f_\nu(x) = \int_\Omega x(t)\mathrm{d}\nu \qquad (x \in C(\Omega)). \tag{27}$$

由

$$|f_\nu(x)| \leqslant \int_\Omega |x(t)| \mathrm{d}|\nu| \leqslant \|x\|_0 \|\nu\| \qquad (用(26))$$

得 $f_\nu \in C(\Omega)^*$ 且 $\|f_\nu\| \leqslant \|\nu\|$. 其次设 ψ 依(25)，则

$$\|\nu\| = |\nu|(\Omega) = \int_\Omega \psi^{-1} \mathrm{d}\nu \qquad (用(26))$$

$$=f_\nu(\psi^{-1})\leqslant\|f_\nu\|\|\psi^{-1}\|_0$$
$$=\|f_\nu\|,$$

其中用到 $\psi=1$，$|\nu|$-a. e.，这就表明

$$M(\Omega)\to C(\Omega)^*,\qquad \nu\to f_\nu \tag{28}$$

是一个等距线性映射．定理 5.6.3 相当于断定(28)是一等距同构．不过，证明(28)是一个满射远不是平凡的，此处不拟介绍．

§ 5.7　Banach 代数

前面所讨论的抽象空间，都不涉及乘法运算．若在 Banach 空间理论的基础上，再考虑一个连续的乘法运算，则得到所谓 Banach 代数理论．这是一个内涵极为丰富的理论，我们用这短短的一节来给出它的一个梗概．

A. 一般 Banach 代数

5.7.1 定义　设 A 是 $\mathbf{K}$ 上的一个代数，且同时是一个赋范空间，使得 A 中的乘法依范数连续，则称 A 为 $\mathbf{K}$ 上的**赋范代数**，当 A 完备时称之为 Banach 代数或 **B 代数**．

下面指出，对一个赋范代数可递次提出一些更强的要求，而实际运用时又不失一般性．

(i) 由乘法的连续性容易推出，必存在正常数 β，使得 $\|xy\|\leqslant\beta\|x\|\|y\|$ $(\forall x,y\in A)$. 若令 $\|x\|_1=\beta\|x\|$，则 $\|xy\|_1\leqslant\|x\|_1\|y\|_1(\forall x,y\in A)$. 因此，不妨假设赋范代数 A 恒满足不等式

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|,\ \|x^n\|\leqslant\|x\|^n\qquad(x,y\in A). \tag{1}$$

(ii) 总不妨设 A 有一个乘法单位元 e. 否则，在 $B=A\times\mathbf{K}$ 中定义范数 $\|(a,\lambda)\|=\|a\|+|\lambda|$ 与乘法

$$(a,\lambda)(b,\mu)=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu),$$

则 B 是以 $e=(0,1)$ 为单位元的赋范代数. 若等同 a 与 $(a,0)(a\in A)$，则 A 是 B 的子代数．

(iii) 总不妨设 A 是 B 代数，否则可考虑 A 的完备化．

这样，下面不妨假定 A 是有单位元 e 的 B 代数，它保持不等式(1)成立．假定 $\|e\|=1$ 并不是一个本质性的限定，但可使讨论变得方便．关于 B 代数的一些最有价值的结论仅适用于复 B 代数，因此下面限定 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

B 代数的一个典型例子是任意 Banach 空间 X 上的有界线性算子代数 $L(X)$，其单位元就是单位算子 I. 显然 $\|I\|=1$. 在某种意义上，有界线性算子代数已囊括所有 B 代数．事实上，若 A 是一个 B 代数，定义 $T_a x=ax(a,$

$x \in A$)，则 $T_a \in L(A)$ 且 $\|T_a\| = \|a\|$，进而易验证

$$A \to L(A), \qquad a \to T_a$$

是一等距嵌入，因而可将 A 看作 $L(A)$ 的闭子代数．由此可见，一般 Banach 代数理论并不比算子代数理论更丰富些．不过从形式上看，我们宁可将 A 当作一个独立的 B 代数，不把它与某个算子代数联系起来，能获得一个更简洁的理论．

Banach 代数理论的中心概念是可逆元．下面给出一连串与之有关的概念，它们的原型在算子理论(尤其是矩阵理论)中是人们熟知的．若 $x, y \in A$，$xy = yx = e$，则称 y 为 x 的**逆元**，记作 x^{-1}，当 x^{-1} 存在时必由 x 唯一决定．若 x 有逆元，则称 x 为**可逆元**．以 G 记 A 中可逆元之全体，它构成一个以 e 为单位元的乘法群．给定 $x \in A$，令

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbf{C}: \lambda e - x \in G\}, \qquad \sigma(x) = \mathbf{C} \backslash \rho(x), \tag{2}$$

二者分别称为 x 的**预解集**与**谱**，$\rho(x)$ 与 $\sigma(x)$ 中的元分别称为 x 的**正则值**与**谱值**．对于 $A = L(X)$ 与 $T \in L(X)$，此处定义的 $\sigma(T)$ 与 § 5.1(20)一致．约定

$$R_\lambda = R(\lambda, x) = (\lambda e - x)^{-1} \qquad (\lambda \in \rho(x)), \tag{3}$$

称 $R(\lambda, x)$ 为 x 的**预解式**，称 $r(x) \triangleq \sup\limits_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$ 为 x 的**谱半径**．约定以

$$D_r(\lambda) \triangleq \{\tau \in \mathbf{C}: |\tau - \lambda| < r\}$$

记复平面上的圆．显然，$\overline{D_{r(x)}(0)}$ 是复平面上以原点为中心且包含 $\sigma(x)$ 的最小闭圆；

$$x \in G \Leftrightarrow 0 \overline{\in} \sigma(x), \qquad \sigma(\lambda e + x) = \lambda + \sigma(x).$$

5.7.2 引理 设 $x \in A$，$\sum x^n$ 收敛，则

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (\text{约定 } x^0 = e), \tag{4}$$

特别，当 $\|x\| < 1$ 时式(4)成立．

证 令 $y = \sum_0^\infty x^n$，直接验证 $(e - x)y = e = y(e - x)$ 即得(4)．当 $\|x\| < 1$ 时，由(1)有 $\sum \|x^n\| < \infty$，故(4)成立． □

以下结果对于整个 Banach 代数理论具有基本意义．

5.7.3 定理(Gelfand) 任给 $x \in A$，$\sigma(x)$ 是一个非空紧集，且

$$r(x) = \lim_n \|x^n\|^{1/n}. \tag{5}$$

证 利用不等式 $\|x^{m+n}\| \leqslant \|x^m\| \|x^n\|$ (依(1))，用一个初等的论证可得

$$\lim_n \|x^n\|^{1/n} = \inf_n \|x^n\|^{1/n} \triangleq \beta. \tag{6}$$

若 $|\lambda|>\beta$，则利用(6)及熟知的级数收敛判别法，知级数

$$R_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n \tag{7}$$

绝对收敛，因而由 5.7.2 有

$$R_\lambda=\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}=(\lambda e-x)^{-1}.$$

这表明 $\lambda\in\sigma(x)\Rightarrow|\lambda|\leqslant\beta$，因此 $r(x)\leqslant\beta$.

取定 $\lambda_0\in\rho(x)$，令 $R_0=R(\lambda_0,x)$（依(3)）. 由 5.7.2，当 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小时 $\lambda e-x=R_0^{-1}[e-(\lambda_0-\lambda)R_0]$ 可逆，且

$$R(\lambda,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^nR_0^{n+1}. \tag{8}$$

因此 $\rho(x)$ 是开集，从而 $\sigma(x)$ 是紧集. 必定 $\sigma(x)\neq\varnothing$，否则，$\forall f\in A^*$，$\varphi(\lambda)=f(R(\lambda,x))$ 在 $\mathbf{C}$ 上有定义. 局部地应用(8)得

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}f(R_0^{n+1})(\lambda_0-\lambda)^n,$$

可见 $\varphi(\lambda)$ 在 $\mathbf{C}$ 上处处解析. 若 $|\lambda|>\beta$，则依(7)有

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}f(x^n)\lambda^{-n-1}, \tag{9}$$

这表明 $\varphi(\infty)=0$，从而 $\varphi(\lambda)\equiv0$，于是 $R(\lambda,x)=0$，得出矛盾.

任给 $\alpha>r(x)$，Laurent 级数(9)在 $\lambda=\alpha$ 时收敛，因而 $f(\alpha^{-n}x^n)$ 有界，这又推出 $M\triangleq\sup\limits_n\|\alpha^{-n}x^n\|<\infty$，因此

$$\beta=\lim_n\|x^n\|^{1/n}\leqslant\lim_n\alpha M^{1/n}\leqslant\alpha.$$

这表明 $\beta\leqslant r(x)$，故式(5)得证. □

谱半径公式(5)是抽象空间理论中为数不多的精确公式之一，有极广泛的应用. (5)的一个直接应用是：用它几乎完全解决了 Banach 代数中幂级数的收敛性问题.

5.7.4 推论　设幂级数 $\sum\alpha_n\lambda^n$ 的收敛半径为 R，$x\in A$，则级数 $\sum\alpha_nx^n$ 在 $r(x)<R$ 时绝对收敛，在 $r(x)>R$ 时发散.

证　结合收敛半径公式 $1/R=\varlimsup\limits_n\sqrt[n]{|\alpha_n|}$ 与(5)得

$$\varlimsup_n\|\alpha_nx^n\|^{1/n}=r(x)/R.$$

若 $r(x)<R$，则 $r(x)/R<1$，因而 $\sum\|\alpha_nx^n\|<\infty$；若 $\sum\alpha_nx^n$ 收敛，则 $\alpha_nx^n\to0$，从而 $M\triangleq\sup\limits_n\|\alpha_nx^n\|<\infty$，于是

$$r(x)/R=\varlimsup_n\|\alpha_nx^n\|^{1/n}\leqslant\lim_nM^{1/n}\leqslant1,$$

即 $r(x)\leqslant R$. 故当 $r(x)>R$ 时 $\sum\alpha_nx^n$ 必发散. □

由 5.7.4 得出一个有重大意义的结论：若 $f(\lambda)$ 是 $D_r(\lambda_0)$ 内的复解析函数，这意味着

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda - \lambda_0)^n \qquad (|\lambda - \lambda_0| < r),$$

则在集 $\{x \in A : \sigma(x) \subset D_r(\lambda_0)\}$ 上，"A- 值解析函数"

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - \lambda_0 e)^n \tag{10}$$

有定义，这就得出了一个将复解析函数推广为 A 上的解析函数的一个一般途径．

现在我们从一个更一般的角度来考虑解析函数的扩张．显然

$$\mathbf{C} \to A, \qquad \lambda \to \lambda e$$

是一个等距的嵌入．因此，只要等同 λ 与 $\lambda e(\lambda \in \mathbf{C})$，就不妨设 $\mathbf{C} \subset A$. 若 $\Omega \subset \mathbf{C}, \Omega \subset D \subset A, f(\lambda): \Omega \to \mathbf{C}$ 与 $f(x): D \to A$ 满足 $f(\lambda e) = f(\lambda)e(\forall \lambda \in \Omega)$，则称 $f(x)$ 为 $f(\lambda)$ 的一个扩张．若 Ω 是一非空开集，$H(\Omega)$ 记 Ω 内的复解析函数之全体，则 $H(\Omega)$ 依自然的运算构成一复代数．现在的问题是：是否存在一个开集 $D \subset A$，使得 $\Omega \subset D$，且每个 $f(\lambda) \in H(\Omega)$ 可扩张为 D 上的某个"解析函数" $f(x)$，并使得这种扩张能保持通常的解析函数运算？这就是解析扩张问题，此问题由下面的定理给出了令人满意的解答．但初看起来出人意外的是，在一般条件下的解析扩张不是通过形如(10)的幂级数，而是借助于 Cauchy 公式的某种推广实现的．令

$$D_\Omega = \{x \in A : \sigma(x) \subset \Omega\}, \tag{11}$$

对每个 $f(\lambda) \in H(\Omega)$，令

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} \mathrm{d}\lambda \qquad (x \in D_\Omega), \tag{12}$$

其中 L 是 Ω 内围绕 $\sigma(x)$ 的任一条正向围道，积分依标准方式定义为一个 Riemann 和的极限．定义式(12)的合理性当然需要验证，为此需用到复分析的一些标准结论，此处略去这些细节．

5.7.5 定理　任给非空开集 $\Omega \subset \mathbf{C}$，由式(11)表出的 D_Ω 是 A 中的开集且 $\Omega \subset D_\Omega$. 任给 $f(\lambda) \in H(\Omega)$，由式(12)定义一个 $f(x): D_\Omega \to A$，对应 $f(\lambda) \to f(x)$ 具有以下性质：

(i) $f(x)$ 是 $f(\lambda)$ 的扩张(称为**解析扩张**).

(ii) 若 $f(\lambda) \in H(\Omega), \sigma(x) \subset D_r(\lambda_0) \subset \Omega$，则 $f(x)$ 可表为式(10).

(iii) 对应 $f(\lambda) \to f(x)$ 是一个代数同构．

(iv) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))(f(\lambda) \in H(\Omega), x \in D_\Omega)$.

(v) 若 $f(\lambda) \in H(\Omega), g(\tau) \in H(\Omega'), f(\Omega) \subset \Omega', x \in D_\Omega$，则

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

(vi) 对应 $f(\lambda)\to f(x)$ 在下述意义上是连续的：若 $\{f_n(\lambda)\}\subset H(\Omega)$ 在 Ω 上紧一致收敛于 $f(\lambda)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 D_Ω 上局部一致收敛于 $f(x)$.

证　由 $\sigma(\lambda e)=\{\lambda\}$ 知 $\Omega\subset D_\Omega$，利用 5.7.2 不难证明 D_Ω 为开集. 式(12)右端的被积函数在 L 上连续，因而 $f(x)$ 有定义，用复变函数方法及 Hahn-Banach 定理可说明由(12)表达的 $f(x)$ 与 L 的选择无关. 这样，对应 $f(\lambda)\to f(x)$ 有确定意义.

(i) 直接由式(12)及 Cauchy 公式得出.

(ii) 不妨设 $\overline{D_r(\lambda_0)}\subset\Omega$，取 L 为圆周 $|\lambda-\lambda_0|=r$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda &&(\text{用(12)})\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L f(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\lambda_0e)^n}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda &&(\text{用(4)})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda\right](x-\lambda_0e)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_0)(x-\lambda_0e)^n &&(\text{用 Cauchy 公式}),\end{aligned}$$

所得表达式显然与(10)一致.

(iii) 唯一值得说明的是 $(fg)(x)=f(x)g(x)$，此处 $f(\lambda),g(\lambda)\in H(\Omega)$，$x\in D_\Omega$. 在 Ω 内取围绕 $\sigma(x)$ 的围道 L 与 Γ，使 Γ 围绕 L，则

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_L f(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,x)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_L f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma g(\tau)R(\lambda,x)R(\tau,x)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_L f(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma g(\tau)\frac{R(\lambda,x)-R(\tau,x)}{\tau-\lambda}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda=(fg)(x).\end{aligned}$$

(iv) 设 $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$. 若 $f(\lambda)\overline{\in}\sigma(f(x))$，则因

$$\varphi(\tau)\triangleq\frac{f(\lambda)-f(\tau)}{\lambda-\tau}\in H(\Omega),$$

有 $\varphi(x)(\lambda e-x)=f(\lambda)e-f(x)\in G$，这推出 $\lambda e-x\in G$，从而 $\lambda\overline{\in}\sigma(x)$，这表明 $f(\sigma(x))\subset\sigma(f(x))$. 若 $\mu\overline{\in}f(\sigma(x))$，则 $g(\tau)\triangleq\mu-f(\tau)$ 在包含 $\sigma(x)$ 的某个开集 Ω' 上不为零，因此 $g(\lambda),h(\lambda)\in H(\Omega')$，$h(\lambda)=1/g(\lambda)$. 于是由 $g(\lambda)h(\lambda)=1$ 得 $g(x)h(x)=e$，从而 $\mu e-f(x)\in G$，$\mu\overline{\in}\sigma(f(x))$，这表明 $\sigma(f(x))\subset f(\sigma(x))$.

(v) 在 Ω 内取围绕 $\sigma(x)$ 的围道 L，在 Ω' 内取围绕 $\sigma(f(x))(=f(\sigma(x)))$ 与 $f(L)$ 的围道 Γ，则

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\tau)R(\tau,f(x))\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma g(\tau)\mathrm{d}\tau\int_L \frac{R(\lambda,x)}{\tau-f(\lambda)}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda\int_\Gamma \frac{g(\tau)}{\tau-f(\lambda)}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_L g(f(\lambda))R(\lambda,x)\mathrm{d}\lambda = (g\circ f)(x). \end{aligned}$$

(vi) 取定 $x_0\in D_\Omega, r>0$ 充分小，围道 $L\subset\Omega$，使得 L 围绕 $\sigma(x)(\forall x\in B_r(x_0))$. 由假设在 L 上 $f_n(\lambda)\rightrightarrows f(\lambda)$，当 r 充分小时可设

$$\beta \triangleq \sup\{\|R(\lambda,x)\|:\lambda\in L, x\in B_r(x_0)\}<\infty.$$

于是 $\forall x\in B_r(x_0)$ 有

$$\begin{aligned} \|f_n(x)-f(x)\| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_L |f_n(\lambda)-f(\lambda)|\ \|R(\lambda,x)\|\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \frac{\beta}{2\pi}\int_L |f_n(\lambda)-f(\lambda)|\mathrm{d}\lambda \to 0 \qquad (n\to\infty), \end{aligned}$$

这表明 $\{f_n(x)\}$ 在 D_Ω 上局部一致收敛于 $f(x)$. □

B. 交换 Banach 代数

现在设 A 是一个**交换**的复 Banach 代数．除了增加"交换性"假定之外，保持上段的所有假设、约定与记号．任何代数同态(参看 1.2.4) $f:A\to\mathbf{C}$ 称为**复同态**，以 $\chi(A)$ 记 A 上的非零复同态(亦称特征)之全体．若 $m\subset A$ 是一理想，$m\neq A$，除 A 之外不存在真包含 m 的理想，则称 m 为 A 的**极大理想**．以 M 记 A 中极大理想之全体．注意到极大理想与向量空间的超子空间颇相类似，从 1.2.7(ii)看来，以下结果似乎是很自然的．

5.7.6 命题 $\chi(A)\to M, f\to \mathrm{Ker}f$ 是一双射．

证 若 $f\in\chi(A), m=\mathrm{Ker}f$，则由 1.2.7(ii)有 $A=m\oplus\mathbf{C}e$，m 是一个理想，它显然已是极大的．若 $f,g\in\chi(A)$，$\mathrm{Ker}f=\mathrm{Ker}g$，则依定理 1.2.7(ii)有常数 β 使 $f=\beta g$. 由 $f(e)=g(e)=1$ 得 $\beta=1$，因而 $f=g$. 因此，$f\to\mathrm{Ker}f$ 是一个单射．余下只要证：任给 $m\in M$，必有 $f\in\chi(A)$ 使 $m=\mathrm{Ker}f$. 因 $\overline{m}$ 亦为理想且 $\overline{m}\subset A\backslash G$，故必 $\overline{m}=m$. 在定理 4.1.18(iv)的基础上易验证 A/m 是一个 B 代数．$\forall x\in A\backslash m$，因 $m+Ax$ 是真包含 m 的理想，故必 $m+Ax=A$，这推出 $\exists y\in A$，使 $xy-e\in m$，而这推出 $PxPy=Pe, P:A\to A/m$ 是

投影．可见 A/m 中的非零元均可逆，故 A/m 是一个域．任给 $\tilde{x} \in A/m$，$\lambda \in \sigma(\tilde{x})$，有 $\lambda\tilde{e} - \tilde{x} = 0$，$\tilde{e} = Pe$，故 $\tilde{x} = \lambda\tilde{e}$，这表明有同构 $\varphi: A/m \cong \mathbf{C}$. 令 $f = \varphi \circ P$，则 $f \in \chi(A)$，$\mathrm{Ker} f = m$，如所要证． □

鉴于5.7.6的结论，下面等同 $\chi(A)$ 与 M，并概称之为 A 的**结构空间**．任给 $m \in M$，m 将被赋予两重含义：一方面，$m(x)(x \in A)$ 表示一个非零复同态，另一方面，m 同时也记 $m(\cdot)$ 的核，这种记号上的"混用"有其方便而无大碍．在5.7.6的证明中我们附带地说明了每个极大理想是闭的，因而 $\chi(A) \subset A^*$（用4.3.1）．下面我们将看到，结构空间 M 对于交换B代数的作用，接近于对偶空间对于Banach空间的作用．

若 X 是Banach空间，则 $\Omega = B_{X^*}$ 依弱*拓扑是一个紧 T_2 空间（依4.4.7），因而 $C(\Omega)$ 依sup范数是一个Banach空间（参看§5.6A）．用§5.1(1)所表示的正则嵌入构成如下等距嵌入

$$X \to C(\Omega), \qquad x \to \tilde{x} \mid \Omega. \tag{13}$$

因 $\tilde{x}(\cdot)$ 依 X^* 中的弱*拓扑平凡地连续，故 $\tilde{x} \mid \Omega \in C(\Omega)$. 而

$$\| x \| = \sup_{\| f \| \leqslant 1} | f(x) | = \| \tilde{x} \|_0,$$

$\| \cdot \|_0$ 记 $C(\Omega)$ 中的sup范数，故(13)确为等距嵌入．这样，可以认为 X 是 $C(\Omega)$ 的子空间．通过嵌入(13)，就将抽象的Banach空间 X 表示成了一个连续函数空间的子空间．由此得出一个初看起来颇为惊人的结论：形如 $C(\Omega)$（Ω 是紧 T_2 空间）的连续函数空间及其闭子空间，穷尽了所有的Banach空间！

现在指明可利用 M 来得到交换B代数 A 的类似表示．令 $\hat{x}(m) = m(x)(x \in A, m \in M)$，则当 $M(\subset A^*)$ 采用 A^* 中的弱*拓扑时 $\hat{x}(\cdot)$ 自动地是连续的，即 $\hat{x}(\cdot) \in C(M)$. 这就得到与(13)相对应的映射

$$A \to C(M), \qquad x \to \hat{x}. \tag{14}$$

5.7.7 定理　M 依 A^* 中的弱*拓扑是一个紧 T_2 空间，因而 $C(M)$ 依sup范数是一个交换Banach代数；映射(14)是一个连续的代数同态，它满足 $\hat{x}(M) = \sigma(x)$，$\| \hat{x} \|_0 = r(x) \leqslant \| x \|$.

证　取定 $x \in A$. $\forall m \in M$，由 $m(x)e - x \in m$ 推出 $m(x)e - x \overline{\in} G$，因而 $m(x) \in \sigma(x)$，这表明 $\hat{x}(M) \subset \sigma(x)$. 若 $\lambda \in \sigma(x)$，则 $(\lambda e - x)A$ 是一真理想，故必有 $m \in M$，使 $(\lambda e - x)A \subset m$，这推出 $\lambda e - x \in m$，因而 $\lambda = m(x) \in \hat{x}(M)$. 这就证得 $\hat{x}(M) = \sigma(x)$，因而 $\| \hat{x} \|_0 = r(x) \leqslant \| x \|$．任给 $m \in M$，由 $| m(x) | = | \hat{x}(m) | \leqslant \| x \|$ 推出 $\| m \| \leqslant 1$；而从 $1 = m(e) \leqslant \| m \|$ 得 $\| m \| = 1$. 可见 M 含于 A^* 中的单位球面．直接看出 M 在 A^* 中是弱*闭的，因此 M 依弱*拓扑是一个紧 T_2 空间（依4.4.7）．映射(14)显然是一个代

数同态，已证的不等式 $\|\hat{x}\|_0 \leqslant \|x\|$ 表明同态(14)是连续的． □

代数同态(14)称为交换 B 代数 A 的 **Gelfand 表示**，$\hat{x}$ 称为 x 的 **Gelfand 变式**，$\mathrm{rad}(A) = \{x \in A; \hat{x} = 0\}$ 称为 A 的**根**，当 $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$ 时称 A 为**半单代数**．与嵌入(13)不同，(14)未必是一个等距嵌入，因而一般不能认为 A 是连续函数代数 $C(M)$ 的子代数．这就使我们自然关注使(14)成为等距嵌入的那些特殊情况，这种情况在下段中就会出现．不过，即使(14)不是等距嵌入，对于交换 B 代数的研究，Gelfand 表示也是一个有用的工具．

若 $A = C(\Omega)$，Ω 是一个紧 T_2 空间，则在一定意义上就有 $M = \Omega$，这意味着当 M 上采用弱*拓扑时存在同胚

$$\Omega \to M, \qquad t \to f_t. \tag{15}$$

事实上，$\forall t \in \Omega$，令 $f_t(x) = x(t)(x \in A)$，则显然 $f_t \in M$. 另一方面，任给 $f \in M$，必有 $t \in \Omega$ 使 $f = f_t$. 否则，$\forall t \in \Omega$，$\exists x_t \in A$，使 $f(x_t) \neq x_t(t)$. 取 t 的邻域 V_t，使 $f(x_t) \neq x_t(s)(s \in V_t)$. 取有限集 $\{t_i\}$，使 $\Omega = \bigcup V_{t_i}$，则

$$x(t) \triangleq \sum_i |x_{t_i}(t) - f(x_{t_i})|^2 > 0 \qquad (t \in \Omega),$$

因而 $x, x^{-1} \in A$. 另一方面易见 $f(x) = 0$，得出矛盾．因此(15)是一个双射．因 $t \to f_t$ 显然是连续的，故必为同胚(依 2.2.4(ii))．

C. * 代数

5.7.8 定义 若复 B 代数 A 上定义了一个**对合** $A \to A, x \to x^*$，它满足条件：

(i) $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$；

(ii) $(xy)^* = y^* x^*$；

(iii) $x^{**} = x$ (以上 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}, x, y \in A$)，

则称 A 为 * **代数**；称 x^* 为 x 的**相伴元**．若进而假定

(iv) $\|xx^*\| = \|x\|^2 (\forall x \in A)$，

则称 A 为 **B* 代数**．保持对合的代数同态称为 * **代数同态**，* **代数同构**的意义自明．

B* 代数的最重要的例子是 Hilbert 空间上的有界线性算子代数，对于它，我们将在 § 5.8 中专门作某些讨论．

以下设 A 是给定的 B* 代数．由 5.7.8(iv)易推出 $\|x\| = \|x^*\| (\forall x \in X)$，因而 $A \to A, x \to x^*$ 是一个等距的共轭线性同构．由 5.7.8 直接推出 $0^* = 0, e^* = e, (x^{-1})^* = (x^*)^{-1} (x \in G)$. 从 $(\lambda e - x)^* = \bar{\lambda} e - x^*$ 推出

$$\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} \triangleq \{\bar{\lambda}: \lambda \in \sigma(x)\}, r(x^*) = r(x).$$

若 $xx^* = x^* x$，则称 x 为**正规元**；若 $x^* = x$，则称 x 为**自伴元**；若 $x^* = x^{-1}$，

则称 x 为**酉元**. 显然自伴元与酉元皆为正规元.

将对合类比于复共轭,看似过于简单化,实际上颇具启发性. 在这一比拟下,自伴元相当于实数. 类似于复数,每个 $x \in A$ 有唯一分解 $x = a + \mathrm{i}b, a, b$ 皆为自伴元; $\forall x \in A, xx^*$ 是自伴元.

5.7.9 命题　设 $x \in A$ 是自伴元,则 $\sigma(x) \subset \mathbf{R}$.

证　设 $\alpha + \mathrm{i}\beta \in \sigma(x)$, 今证 $\beta = 0$. $\forall t \in \mathbf{R}$, 有

$$\alpha + \mathrm{i}(\beta + t) \in \sigma(x + \mathrm{i}te),$$

于是

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 \leqslant \| x + \mathrm{i}te \|^2 = \| (x + \mathrm{i}te)(x + \mathrm{i}te)^* \|$$
$$= \| x^2 + t^2 e \| \leqslant \| x \|^2 + t^2,$$

这推出 $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leqslant \| x \|^2$. 要使左端有上界,必须 $\beta = 0$. □

5.7.10 Stone-Weierstrass 定理　设 Ω 是一紧 T_2 空间, $C(\Omega)$ 依取复共轭作为对合而成为 B^* 代数, A 是 $C(\Omega)$ 的 $*$ 子代数, A 分离 Ω 的点, $1 \in A$, 则 A 在 $C(\Omega)$ 中稠密,当 A 为闭子代数时必 $A = C(\Omega)$.

证　令 $B = A \cap C(\Omega, \mathbf{R})$, 只要证 B 在 $C(\Omega, \mathbf{R})$ 中稠密. 取定 $x_0 \in C(\Omega, \mathbf{R}), \varepsilon > 0$. $\forall x \in C(\Omega, \mathbf{R})$, 由 Weierstrass 定理有实系数多项式 P, 使得

$$\sup_{t \leqslant \| x \|_0} | P(t) - | t | | < \varepsilon,$$

这推出 $\| P \circ x - | x | \|_0 < \varepsilon$, 这表明 $x \in B \Rightarrow | x | \in B$, 这又推出 B 对格运算封闭. $\forall t, s \in \Omega$, 取 $x_{ts} \in B$, 使得 $x_{ts}(t) = x_0(t), x_{ts}(s) = x_0(s)$ (A 分离 Ω 中的点用于此!). $\forall s \in \Omega$, 取 s 的邻域 V_s, 使得

$$x_{ts}(\tau) < x_0(\tau) + \varepsilon \qquad (\forall \tau \in V_s).$$

取 Ω 的有限覆盖 $\{V_{s_j}\}$, 则 $x_t = \min\limits_j x_{ts_j} \in B$,

$$x_t(t) = x_0(t), x_t(s) < x_0(s) + \varepsilon \qquad (s \in \Omega).$$

类似地可得 $x = \max\limits_i x_{t_i} \in B$, $\| x - x_0 \|_0 < \varepsilon$, 如所要证. □

利用 5.7.10,现在已可建立关于 B^* 代数的最重要的结果.

5.7.11 定理(Gelfand-Naimark　1943)　设 A 是交换 B^* 代数, M 是其结构空间,则 Gelfand 表示(14)是一个等距的 $*$ 代数同构.

证　5.7.7 已经确立(14)为代数同态且 $\| \hat{x} \|_0 \leqslant \| x \|$ ($\forall x \in A$). 设 $x = a + \mathrm{i}b \in A, a, b$ 是自伴元, $m \in M$, 则

$$m(x^*) = m(a) - \mathrm{i}m(b) = \overline{m(x)}. \tag{16}$$

注意当 a 是自伴元时有 $\hat{a}(M) = \sigma(a) \subset \mathbf{R}$ (用 5.7.7 与 5.7.9). (16)表明 $\hat{x^*} = \bar{\hat{x}}$, 可见 $x \to \hat{x}$ 是一个 $*$ 代数同态, $C(M)$ 中以取复共轭为对合. 令 $y = xx^*$, 则依 5.7.8(iv)有 $\| y^2 \| = \| y \|^2$, 归纳地有 $\| y^m \| = \| y \|^m$ ($m = 2^n$), 于是用谱半径公式(5)得

$$\|x\|^2 = \|y\| = r(y) = \|\hat{y}\|_0 = \|\hat{x}\|_0^2.$$

可见映射 $x \to \hat{x}$ 是等距的,因而 $\hat{A} \triangleq \{\hat{x}: x \in A\}$ 是 $C(M)$ 的一个闭 $*$ 子代数. $\hat{A}$ 显然分离 M 中的点,$1 = \hat{e} \in \hat{A}$,故由 5.7.10 有 $\hat{A} = C(M)$. □

5.7.11 确立了一个初看起来颇令人惊异的事实:实质上仅有一种交换 B^* 代数,即某个紧 T_2 空间上的复连续函数代数 $C(\Omega)$! 这就将交换 B^* 代数完全具体化了. 在代数 $C(\Omega)$ 中,单位元就是函数 1,对合就是复共轭,自伴元就是实函数,酉元就是绝对值为 1 的函数等. 所有这些概念都是直接而便于描述的.

仅适用于**交换** B^* 代数,看来是定理 5.7.11 的一个重大局限. 不过,至少它能用于非交换 B^* 代数的交换 $*$ 子代数. 在一般 B^* 代数的研究中,5.7.11 正是以这种方式发挥作用. 下面是一个典型例子.

5.7.12 定理 设 $x \in A$ 是一正规元,B 是由 $\{e, x, x^*\}$ 生成的闭子代数,则 B 是交换 B^* 代数,它等距 $*$ 代数同构于 $C(\sigma)$,$\sigma = \sigma(x)$. 若 $y \in A$ 与 x 可换,则 y 与每个 $b \in B$ 可换.

证 任给 $b \in B$. 由 B 的构成知 b 可用 (x, x^*) 的多项式逼近,从而 b^* 亦如此,故 $b^* \in B$. 因此 B 是 A 的闭 $*$ 子代数,从而是 B^* 代数. 由 x 与 x^* 可换推出 B 是交换的. 以 $\sigma(x, B)$ 记 x 在 B 中的谱,今指明 $\sigma(x, B) = \sigma(x)$. 显然 $\sigma(x, B) \supset \sigma(x)$. 为证 $\sigma(x, B) \subset \sigma(x)$,只要证 $y \in B \cap G \Rightarrow y^{-1} \in B$. 若 $y \in B, y^{-1} \overline{\in} B$,则 $e \overline{\in} yB$,于是 $0 \in \sigma(yy^*, B)$. 因 $\sigma(yy^*) \subset \mathbf{R}$ (5.7.9),故 $\rho(yy^*)$ 连通,而易见 $\mathbf{C} \backslash \sigma(yy^*, B)$ 是 $\rho(yy^*)$ 中既开又闭之集,因此 $\sigma(yy^*, B) = \sigma(yy^*)$. 这推出 $0 \in \sigma(yy^*)$,与 yy^* 可逆矛盾. 于是得 $\sigma(x, B) = \sigma(x) \triangleq \sigma$. 令 $M = \chi(B)$,由 B 的定义知 $m \in M$ 完全决定于 $m(x)$ (注意 $m(x^*) = \overline{m(x)}$!). 因此,

$$\hat{x}: M \to \sigma, \qquad m \to m(x)$$

是一连续双射(回忆 M 中用弱*拓扑),从而是一同胚(依 2.2.4(ii)). 另一方面,由 5.7.11,

$$B \to C(M), \qquad b \to \hat{b}$$

是一等距的 $*$ 代数同构,因此

$$B \to C(\sigma), \qquad b \to \hat{b} \circ \hat{x}^{-1} \tag{17}$$

亦为等距的 $*$ 代数同构.

关于可换性的结论的证明需要稍细致的推理,从略. □

同构(17)的逆可写作

$$C(\sigma) \to B, \qquad f(\lambda) \to f(x), \tag{18}$$

其中 $f(x) \in B$ 由等式 $f(x)^{\wedge} = f \circ \hat{x}$ 唯一决定.

以上结果的重大意义在于,它导出一个扩张连续函数的一般方法,其效果类似于 5.7.5 中描述的解析扩张. 任给非空集 $\Omega\subset\mathbf{C}$(不要求 Ω 为开集!),令

$$D_\Omega=\{x\in A: xx^*=x^*x,\sigma(x)\subset\Omega\},$$

则 $\Omega\subset D_\Omega$. 任给 $f(\lambda)\in C(\Omega)$,$x\in D_\Omega$,则由(18)知 $f(\lambda)$ 确定地对应一个 $f(x)\in A$,因而 $f(x): D_\Omega\to A$ 是一个确定的函数. 对应 $f(\lambda)\to f(x)$ 有类似于 5.7.5 的以下性质:

(i) $f(\lambda e)=f(\lambda)e(\lambda\in\Omega)$,故 $f(x)$ 是 $f(\lambda)$ 的扩张,不妨称 $f(x)$ 为 $f(\lambda)$ 的连续扩张(与解析扩张相对照).

(ii) $f(x)$ 可用 (x,x^*) 的多项式逼近,若 x 是自伴元,则 $f(x)$ 可用 x 的多项式逼近.

(iii) $f(\lambda)\to f(x)$ 是一个代数同构.

(iv) $\bar{f}(x)=f(x)^*$,此处 $\bar{f}$ 记 $\overline{f(\lambda)}$,$f(\lambda)\in C(\Omega)$. 若 $f(\lambda)\in C(\Omega,\mathbf{R})$,$x\in D_\Omega$,则 $f(x)$ 是自伴元;若 $f(\lambda)\in C(\Omega)$,$|f(\lambda)|=1$,$x\in D_\Omega$,则 $f(x)$ 是酉元.

(v) $\sigma(f(x))=f(\sigma(x))(f(\lambda)\in C(\Omega),x\in D_\Omega)$.

(vi) 若 $f(\lambda)\in C(\Omega)$,$g(\lambda)\in C(\Omega')$,$f(\Omega)\subset\Omega'$,$x\in D_\Omega$,则 $g(f(x))=(g\circ f)(x)$.

以上结论均不难由基本关系式 $f(x)^{\hat{}}=f\circ\hat{x}$ 推出.

若 $x\in A$ 是酉元,$f(\lambda)=\lambda$,$\varphi(\lambda)=|\lambda|^2$,则 $f(x)=x$,

$$\varphi(x)=f(x)\bar{f}(x)=xx^*=e,$$

$$\{1\}=\sigma(\varphi(x))=\varphi(\sigma(x))=\{|\lambda|^2:\lambda\in\sigma(x)\},$$

这就证明了:x 是酉元 $\Rightarrow\sigma(x)\subset\{\lambda:|\lambda|=1\}$. 类似地可证明:若 $x\in A$ 是正规元,则

$$x\text{ 是自伴元}\Leftrightarrow\sigma(x)\subset\mathbf{R},$$

$$x\text{ 是酉元}\Leftrightarrow\sigma(x)\subset\{\lambda:|\lambda|=1\}.$$

§5.8　Hilbert 空间及其算子代数

如在§1.4 中已提到的,Hilbert 空间是最接近于 Euclid 空间的抽象空间,因而在本书力图加以概括的抽象空间谱系中,要算最为具体的了. 正因为 Hilbert 空间拥有最具体的结构,有关它的理论也就特别丰富. 本书已近尾声,当然不可能去接触 Hilbert 空间理论的范围广泛的问题了,只是选择了这样的材料:你在阅读它们时最容易联想到本书前面的一些相关内容,从而为本书所提供的抽象空间谱系的内在统一性,提供一些新的证据.

以下设 H 是给定的**复** Hilbert 空间. 至于下面的哪些内容亦适用于实

Hilbert 空间，读者可从其推演中自行判断.

A. Hilbert 空间中的几何学

与一般 Banach 空间比较，Hilbert 空间的明显优势是，其中几乎可以完整地移植通常的 Euclid 几何理论，下面是几个典型的结果.

5.8.1 定理 复 Banach 空间 X 是 Hilbert 空间的充要条件是，其中的范数满足如下**中线公式**：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad (x,y\in X). \tag{1}$$

直观上，式(1)意味着，以 $0,x,y$ 与 $x+y$ 为顶点的平行四边形的各边平方和等于两对角线的平方和. 这一事实在 Euclid 几何中是熟知的.

证 若 X 是 Hilbert 空间，则利用 $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ 容易直接验证(1)为等式. 充分性的证明要困难些. 以下设条件(1)已满足，今要在 X 上构造一个内积 $\langle x,y\rangle$，使得 $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$，所需的内积定义为

$$\begin{cases} 4\varphi(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2, & \text{(2a)}\\ \langle x,y\rangle=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\varphi(x,\mathrm{i}y). & \text{(2b)}\end{cases}$$

(i) 验证 $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$，这是直接的. 由此直接得出正定性(参看定义 1.4.11).

(ii) 验证 $\varphi(x,y)$ 是 X 上的一个实内积，这是关键性的一步. $\varphi(x,y)$ 显然是对称的，且 $\varphi(0,y)=0$. 其次，

$$\begin{aligned}
&4\varphi(x+z,y)\\
&=\|x+z+y\|^2-\|x+z-y\|^2 && \text{(用(2a))}\\
&=\frac{1}{4}(\|2x+y+2z+y\|^2-\|2x-y+2z-y\|^2)\\
&=\frac{1}{2}(\|2x+y\|^2+\|2z+y\|^2\\
&\quad-\|2x-y\|^2-\|2z-y\|^2) && \text{(用(1))}\\
&=2\varphi(2x,y)+2\varphi(2z,y) && \text{(用(2a))}.
\end{aligned} \tag{3}$$

令 $z=0$ 得 $2\varphi(x,y)=\varphi(2x,y)$，以此代回式(3)得

$$\varphi(x+z,y)=\varphi(x,y)+\varphi(z,y),$$

这表明 $\varphi(\cdot,y)$ 是可加实函数，$\varphi(\cdot,y)$ 显然是连续的，故必定是线性的.

(iii) 验证 $\langle x,y\rangle$ 为内积. 显然 $\varphi(\mathrm{i}x,\mathrm{i}y)=\varphi(x,y)$，而

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle&=\varphi(y,x)+\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}y,x) && \text{(用(2b))}\\
&=\varphi(y,x)+\mathrm{i}\varphi(-y,\mathrm{i}x)\\
&=\varphi(y,x)-\mathrm{i}\varphi(y,\mathrm{i}x)=\overline{\langle y,x\rangle}.
\end{aligned}$$

由 $\varphi(\cdot,y)$ 是实线性的推出 $\langle\cdot,y\rangle$ 是实线性的，这加上

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{i}x, y\rangle &= \varphi(\mathrm{i}x, y) + \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x, \mathrm{i}y) \\ &= \varphi(-x, \mathrm{i}y) + \mathrm{i}\varphi(x, y) \\ &= \mathrm{i}[\varphi(x, y) + \mathrm{i}\varphi(x, \mathrm{i}y)] = \mathrm{i}\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

推出 $\langle \cdot, y\rangle$ 是复线性的，因此 $\langle x, y\rangle$ 是一个内积． □

Hilbert 空间中大多数结论依赖于正交性概念．

5.8.2 定义　设 $x, y, x_i \in H(i \in I), A, B \subset H$.

(i) 若 $\langle x, y\rangle = 0$，则说 x 与 y **正交**，记作 $x \perp y$；若 $\forall a \in A, \forall b \in B$，有 $a \perp b$，则说 A 与 B 正交，记作 $A \perp B$；$x \perp B$ 的意义自明．

(ii) 若当 $i, j \in I, i \neq j$ 时 $x_i \perp x_j$，则称 $\{x_i : i \in I\}$ 为**正交系**．若 $\{x_i\}$ 是正交系且 $\|x_i\| \equiv 1$（这等价于 $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$，$\delta_{ij}$ 是熟知的 Kronecker 记号），则称 $\{x_i\}$ 是**标准正交系**．

(iii) 令 $A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\}$，称 $A^{\perp}$ 为 A 的**正交补**．

若 $\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是一有限正交系，则由直接计算有（用 §1.4(25b)）

$$\Big\|\sum_i x_i\Big\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2. \tag{4}$$

特别，取 $n = 2$ 得

$$\|x_1 \pm x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2,$$

这正表达到了熟知的**勾股定理**．因此，可以说式(4)表达了一般的勾股定理．以 $\alpha_i x_i$ 代替 $x_i(\alpha_i \in \mathbf{C}, 1 \leqslant i \leqslant n)$，从式(4)得

$$\Big\|\sum_i \alpha_i x_i\Big\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2. \tag{5}$$

若 $\{x_i\}$ 中无零元，则从式(5)知 $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0(1 \leqslant i \leqslant n)$．由此可见，不含零元的正交系必线性无关．

若 $\{e_i : i \in I\}$ 是一标准正交系，则它颇类似于 Euclid 空间中的直角坐标架．我们关心的问题是：在什么条件下每个 $x \in H$ 可表成

$$x = \sum_i \alpha_i e_i. \tag{6}$$

首先得说明，对任意的无限集 I，(6)中和式的意义．任给有限集 $J \subset I$，令 $x_J = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i$，约定 $J \leqslant J' \Leftrightarrow J \subset J'$，则 $\{x_J : J \subset 有限\}$ 是一个网．这就自然地定义

$$x = \sum_i \alpha_i e_i = \lim_J x_J,$$

只要右端之极限存在，此时说和式 $\sum \alpha_i e_i$ 收敛于 x．若(6)式成立，则结合(4)有

$$\|x\|^2 = \lim_J \|x_J\|^2 = \lim_J \sum_{i \in J} |\alpha_i|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2;$$

而

$$\langle x,e_i\rangle = \lim_J \langle x_J,e_i\rangle = \alpha_i \qquad (用 §1.4(26)).$$

由此可见，若分解式(6)成立，则其系数只能是 $\alpha_i = \langle x,e_i\rangle$（为记号方便，下面记作 $\hat{x}_i$），且和式 $\sum |\alpha_i|^2$ 收敛．后一结论又推出，

$$I_n = \{i \in I: |\alpha_i| > 1/n\} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

必为有限集，因而 $\bigcup I_n = \{i \in I: |\alpha_i| > 0\}$ 是可数集．这就表明，当(6)成立时其右端实际上是可数项的和．

有了以上准备之后，现在建立以下基本结果．

5.8.3 定理 设 $\{e_i: i \in I\} \subset H$ 是一标准正交系，则以下条件互相等价：

(i) $\{e_i\}$ 是 H 的**标准正交基**，即每个 $x \in H$ 有形如(6)的表示；

(ii) $\{e_i\}$ 是 H 的基本集（依定义 4.1.8）；

(iii) $\{e_i\}$ 是 H 中的**极大正交系**，即在 $\{e_i\}$ 中添加任何一个不在 $\{e_i\}$ 中的非零元之后，不再是正交系；

(iv) 对任给 $x \in H$，有如下 **Parseval 等式**：

$$\|x\|^2 = \sum_i |\hat{x}_i|^2 \qquad (\hat{x}_i = \langle x,e_i\rangle); \tag{7}$$

(v) 对任给 $x,y \in H$，有内积公式：

$$\langle x,y\rangle = \sum_i \hat{x}_i \overline{\hat{y}_i}. \tag{8}$$

证 显然(i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii). 设 $\{e_i\}$ 是基本集，$x \perp e_i (\forall i \in I)$，今要证 $x = 0$，为此只要证 $\|x\|^2 = 0$. 取序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{span}\{e_i\}$，使得 $x_n \to x$，则

$$\|x\|^2 = \lim_n \langle x,x_n\rangle = 0 \qquad (用 §1.4(26)).$$

(iii)⇒(i). 设条件(iii)满足．取定 $x \in H$，对任给有限集 $J \subset I$，令 $s_J = \sum_{j\in J} \hat{x}_j e_j$，今要证 $s_J \to x$. 这是定理证明的核心部分．易直接验证 $s_J \perp (s_J - x)$，这结合式(4)，(5)得

$$\begin{cases} \|s_J\|^2 + \|s_J - x\|^2 = \|x\|^2, & (9a) \\ \|s_J\|^2 = \sum\limits_{j\in J} |\hat{x}_j|^2 \leqslant \|x\|^2, & (9b) \\ \|s_J - s_K\|^2 = \sum\limits_{j \in J\Delta K} |\hat{x}_j|^2, & (9c) \end{cases}$$

其中 K 如同 J 一样是 I 的有限子集，$J\Delta K = (J\backslash K) \cup (K\backslash J)$. (9b)表明和式 $\sum |\hat{x}_j|^2$ 收敛，而这结合(9c)又说明 $\{s_J: J \subset I 有限\}$ 是 Cauchy 网，因而 $s_J \to y \in H$. 只要证 $y = x$；因可用条件(iii)，故只要证 $\langle y - x, e_i\rangle = 0$，而为此又只要证 $\hat{y}_i = \hat{x}_i (\forall i \in I)$. 取定 $i \in I$，有

$$\hat{y}_i = \lim_J \langle s_J, e_i \rangle = \lim_J \sum_{j\in J} \hat{x}_j \delta_{ij} = \hat{x}_i.$$

从(9a),(9b)直接看出(i)⇔(iv). 其次显然有(i)⇒(v)⇒(iv),因此定理得证. □

利用定理 5. 8. 3,可得出关于 Hilbert 空间的以下基本结论:

5. 8. 4 推论　对于 Hilbert 空间 H 以下结论成立:

(i) H 必有标准正交基存在.

(ii) 若 $\{e_i : i \in I\}$ 是 H 的标准正交基,令

$$l^2(I) = \{\xi = (\xi_i) \in \mathbf{C}^I : \sum_{i\in I} |\xi_i|^2 < \infty\}, \tag{10}$$

则 $l^2(I)$ 依内积(对照 § 1. 4(24))

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i\in I} \xi_i \bar{\eta}_i$$

是一 Hilbert 空间,而

$$H \to l^2(I), x \to (\hat{x}_i) \qquad (\hat{x}_i = \langle x, e_i \rangle) \tag{11}$$

是一个 Hilbert 空间同构,即保持内积对应的线性同构.

(iii) 设 $l^2 = l^2(\mathbf{N})$, 则 $H \cong l^2$ ($\cong$记 Hilbert 空间同构) ⇔H 是可数基空间 ⇔H 是无限维可分空间.

证　(i) 由极大原理(1. 1. 6), H 中必存在极大标准正交基 $\{e_i\}$. 由 5. 8. 3(iii), $\{e_i\}$ 必为 H 的标准正交基.

(ii) 由 5. 8. 3(v),(11)是一个保持内积的线性映射,因而必为等距映射,等距性推出单射性. 设 $\xi = (\xi_i) \in l^2(I)$, 任给有限集 $J \subset I$, 令 $x_J = \sum_{j\in J} \xi_j e_j$, 则类似于 5. 8. 3 之证,利用 $\sum |\xi_j|^2 < \infty$ 可说明 $\{x_J\}$ 为 Cauchy 网. 设 $x_J \to x \in H$, 则必 $\hat{x}_i = \langle x, e_i \rangle = \xi_i (\forall i \in I)$. 这表明对应(11)是一同构.

结论(iii)是明显的. □

推论 5. 8. 4 表明,Hilbert 空间实质上就是空间 $l^2(I)$, 而应用上最重要的可分无限维 Hilbert 空间可认为实质上就是形式上很简单的空间 l^2. 考虑到 $l^2(I)$ 正是 Euclid 空间 $\mathbf{C}^n$ 的直接推广,Hilbert 空间与 Euclid 空间的亲缘关系就特别明显了.

5. 8. 5 定理　设 A 是 H 的闭子空间,则有拓扑直和分解 $H = A \oplus A^\perp$. 设 P 是由这一分解所决定的从 H 到 A 的投影,则

$$\| x - Px \| = d(x, A) \qquad (x \in H). \tag{12}$$

证　给定 $x \in H$. 令 $\rho = d(x, A)$, 则有序列 $\{x_n\} \subset A$, 使得 $\| x_n - x \| \to \rho$. 由中值公式(1)有

$$\| x_m - x_n \|^2 = \| (x_m - x) - (x_n - x) \|^2$$

$$=2\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-4\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|^2$$

$$\leqslant 2\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-4\rho^2\to 0 \qquad (m,n\to\infty),$$

可见 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 设 $x_n\to a\in A$, 令 $b=x-a$, 则 $\|b\|=\rho$, 今证 $b\in A^{\perp}$. 取定 $y\in A$, $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, 有

$$\rho^2\leqslant\|x-(a+\lambda y)\|^2=\|b-\lambda y\|^2$$

$$=\rho^2-\lambda\langle y,b\rangle-\bar{\lambda}\langle b,y\rangle+|\lambda|^2\|y\|^2.$$

可设 $y\neq 0$, 取 $\lambda=\langle b,y\rangle/\|y\|^2$ 代入以上不等式得 $|\langle b,y\rangle|^2\leqslant 0$, 故 $\langle b,y\rangle=0$, $b\in A^{\perp}$, 这就得到 $H=A+A^{\perp}$. 因显然有 $A\cap A^{\perp}=\{0\}$, 故 $H=A\oplus A^{\perp}$. 因 A 与 $A^{\perp}$ 均为 H 的闭子空间, 故 $A\oplus A^{\perp}$ 是拓扑直和(4.2.4(iv)). 证明中已得的等式 $\|b\|=\|x-a\|=\rho$ 表明等式(12)成立. □

定理 5.8.5 中的算子 P 由闭子空间 A 唯一决定, 称为从 H 到 A 的**正投影**. 式(12)表明, Px 是 x 在 A 中的最佳逼近. 直观上, 可将 Px 想像为从点 x 引 A 的垂线之"垂足".

B. 有界线性算子代数 $L(H)$

Hilbert 空间上的线性算子理论, 以继承大量的线性代数结果为其特色. 对于这些结果的建立, 空间 H 的自对偶性起了基本作用.

5.8.6 Riesz 表示定理 $f\in H^*$ 有通式

$$f(x)=\langle x,y\rangle \qquad (x\in H), \tag{13}$$

其中 $y\in H$ 由 f 唯一决定且 $\|y\|=\|f\|$.

证 任给 $y\in H$, 依(13)定义 $f(x)$, 则 $f(\cdot)$ 显然是 H 上的线性泛函. 由 Schwarz 不等式(§1.4(23))推出 $f\in H^*$ 且 $\|f\|\leqslant\|y\|$, 然后由 $\|y\|^2=f(y)\leqslant\|f\|\|y\|$ 得 $\|y\|\leqslant\|f\|$, 从而 $\|y\|=\|f\|$.

反之, 给定 $f\in H^*$, 今要证有唯一 $y\in H$ 使(13)成立. 不妨设 $f\neq 0$ (否则取 $y=0$ 好了), 于是 $A=N(f)$ 是 H 的真闭子空间, $H=A\oplus A^{\perp}$ (依 5.8.5). 取 $0\neq b\in A^{\perp}$, 必 $f(b)\neq 0$, $y\triangleq\overline{f(b)}\|b\|^{-2}b\in A^{\perp}$. $\forall x\in H$, 因 $x-[f(x)/f(b)]b\in A$, 故

$$\langle x,y\rangle=\left\langle\frac{f(x)}{f(b)}b,\frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2}b\right\rangle=f(x),$$

这表明(13)成立. 若此外还有 $z\in H$ 使 $f(x)=\langle x,z\rangle(\forall x\in H)$, 则

$$0=\langle y-z,y\rangle-\langle y-z,z\rangle=\|y-z\|^2,$$

可见 $y=z$, 故使(13)成立的 y 由 f 唯一决定. □

若将(13)中的 f 写作 f_y, 则对应

$$T:H\to H^*, y\to f_y$$

是一个等距的共轭线性双射，称为**共轭线性同构**．由于这样一个同构存在，在某种意义上不妨认定 $H^* = H$，且说 H 是**自对偶**的．这种自对偶性是 Hilbert 空间理论中很多重要结论的基础．以下就是一典型例子．

5.8.7 Lax-Milgram 定理　设 $\varphi(x,y): H \times H \to \mathbf{C}$ 分别对 x 与 y 是线性的与共轭线性的（这样的 φ 称为 H 上的 **Hermite 双线性泛函**），且

$$M = \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} |\varphi(x,y)| < \infty, \tag{14}$$

则存在唯一的 $T \in L(H)$，使得

$$\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \qquad (x,y \in H), \tag{15}$$

且 $\|T\| = M$. 若 $\inf_{\|x\|=1} |\varphi(x,x)| > 0$，则 $T: H \to H$ 为同构．

证　令 $\varphi_x = \overline{\varphi(x,\cdot)}$，则 φ_x 是 H 上的线性泛函．由(14)推出

$$|\varphi_x^*(y)| = |\varphi(x,y)| \leqslant M\|x\|\,\|y\|,$$

由此得 $\varphi_x \in H^*$ 且 $\|\varphi_x\| \leqslant M\|x\|$．由 5.8.6，有唯一的 $Tx \in H$，使得

$$\varphi(x,y) = \overline{\varphi_x(y)} = \overline{\langle y, Tx\rangle} = \langle Tx, y\rangle,$$

即(15)成立．由 $\varphi(x,y)$ 对 x 的线性性及恒等式(15)推出 T 对 x 是线性的，而

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\sup_{\|y\|=1}|\varphi_x(y)| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1}|\varphi(x,y)| = M.\end{aligned}$$

若 $m \triangleq \inf_{\|x\|=1}|\varphi(x,x)| > 0$，则 $\forall x \in H$，有

$$m\|x\|^2 \leqslant |\varphi(x,x)| = |\langle Tx, x\rangle| \leqslant \|Tx\|\,\|x\|,$$

这推出 $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$．由此易见 $T: H \to R(T)$ 是一拓扑同构，因而 $R(T)$ 是 H 的闭子空间．任给 $x \in R(T)^\perp$，由

$$0 = \langle Tx, x\rangle = |\varphi(x,x)| \geqslant m\|x\|^2$$

推出 $x = 0$，可见 $R(T)^\perp = \{0\}$，从而 $R(T) = H$，故 $T: H \to H$ 为同构．

□

Lax-Milgram 定理沟通了 Hermite 双线性泛函与线性算子之间的联系，是 Hilbert 空间理论中的一个基本工具，其应用颇为广泛．下面就是一个重要应用：任给 $T \in L(H)$，$\varphi(y,x) \triangleq \langle y, Tx\rangle$ 显然是一 Hermite 双线性泛函，于是由 5.8.7 有唯一的 $T^* \in L(H)$，使得

$$\langle T^*y, x\rangle = \varphi(y,x) = \langle y, Tx\rangle,$$

即

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad (x,y \in H), \tag{16}$$

这样的 T^* 称为 T 的**相伴算子**．利用恒等式(16)，不难直接推出相伴算子的下述基本性质．

5.8.8 命题　对任给 $T,S \in L(H)$，$\alpha,\beta \in \mathbf{C}$，以下等式成立：

$$(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*,$$

$$(TS)^* = S^* T^*, \qquad T^{**} = T,$$
$$\| T^* \| = \| T \|,$$
$$\| TT^* \| = \| T \|^2 = \| T^* T \|.$$

对照定义 5.7.8 看出，命题 5.8.8 无非是说：以 $T \to T^*$ 作为对合运算，算子代数 $L(H)$ 是一个 B* 代数．这就可将有关 B* 代数的各种概念与结果直接移用于算子代数 $L(H)$．今将一些基本的概念与结论概述如下．

B* 代数 $L(H)$ 中的正规元、自伴元与酉元（参看 § 5.7C）分别称为**正规算子、自伴算子与酉算子**，三者分别界定为：

$$T \text{ 是正规算子} \Leftrightarrow TT^* = T^* T,$$
$$T \text{ 是自伴算子} \Leftrightarrow T = T^*,$$
$$T \text{ 是酉算子} \Leftrightarrow T^* = T^{-1}.$$

若 $T \in L(H)$ 是正规算子，则由 $\{I, T, T^*\}$ 生成的 $L(H)$ 的闭子代数是一个交换 B* 代数，它等距 * 代数同构于 $C(\sigma(T))$（依定理 5.7.12），$\| T \| = r(T)$（T 的谱半径），T 是自伴算子 $\Leftrightarrow \sigma(T) \subset \mathbf{R}$，$T$ 是酉算子 $\Leftrightarrow \sigma(T) \subset$ 单位圆周．正规算子、自伴算子与酉算子的有限维原型分别是：正规矩阵、Hermite 对称矩阵与酉矩阵．

5.8.9 命题 设 $T \in L(H)$，则以下结论成立：

(i) T 是正规算子 $\Leftrightarrow \| Tx \| = \| T^* x \| (\forall x \in H)$；

(ii) T 是自伴算子 $\Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle \in \mathbf{R} (\forall x \in H)$；

(iii) T 是酉算子 $\Leftrightarrow T: H \to H$ 为等距同构．

证 由直接计算可验证恒等式：

$$4\langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + \mathrm{i}\langle T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y \rangle - \mathrm{i}\langle T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y \rangle. \quad (17)$$

由(17)推出：若 $\langle Tx, x \rangle \equiv 0 (x \in H)$，则 $\langle Tx, y \rangle \equiv 0 (x, y \in H)$，从而 $Tx \equiv 0$，即 $T = 0$．这又推出：若 $T, S \in L(H)$，$\langle Tx, x \rangle \equiv \langle Sx, x \rangle (x \in H)$，则 $T = S$．

利用以上结论，有

$$TT^* = T^* T \Leftrightarrow \langle TT^* x, x \rangle \equiv \langle T^* Tx, x \rangle$$
$$\Leftrightarrow \| T^* x \| \equiv \| Tx \|,$$
$$T = T^* \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle \equiv \langle T^* x, x \rangle$$
$$\Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle \equiv \overline{\langle Tx, x \rangle},$$
$$T^* = T^{-1} \Leftrightarrow TT^* = T^* T = I$$
$$\Leftrightarrow \| T^* x \| = \| Tx \| = \| x \|$$
$$\Leftrightarrow T: H \to H \text{ 是等距同构},$$

这正好得出命题的结论(i)～(iii)． □

$\langle Tx, x\rangle$ 称为由 T 决定的**二次泛函**. 命题 5.8.9 表明,当 T 是自伴算子时 $\langle Tx, x\rangle$ 是 H 上的实泛函,它正是通常二次型的推广. 线性代数中关于二次型的一些熟知结果可推广于二次泛函.

在 5.8.5 中已提到正投影,它因其明显的直观意义而处于特殊地位. 正投影的有限维原型就是形如 $\mathrm{diag}(I_r, 0)$ 的矩阵,其中 I_r 记 r 阶单位矩阵.

5.8.10 命题　$T \in L(H)$ 是正投影 $\Leftrightarrow T^* = T = T^2$.

证　首先设 $T = P_A$, A 是 H 的闭子空间,显然有 $T^2 = T$. 其次, $\forall x, y \in H$, 有

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \langle Tx, Ty\rangle + \langle Tx, y - Ty\rangle \\ &= \langle Tx, Ty\rangle \qquad (\text{因 } y - Ty \in A^\perp) \\ &= \langle x, Ty\rangle \qquad (\text{因 } x - Tx \in A^\perp),\end{aligned}$$

这表明 $T = T^*$. 反之,设 $T^* = T = T^2$, 令 $A = R(T)$, $B = R(I - T)$, 则 $A = N(I - T)$ 与 $B = N(T)$ 均为闭子空间, $H = A + B$. 因

$$\begin{aligned}\langle Tx, y - Ty\rangle &= \langle Tx, y\rangle - \langle Tx, Ty\rangle \\ &= \langle Tx, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = 0,\end{aligned}$$

故 $A \perp B$, $B \subset A^\perp$. 这推出 $H = A \oplus A^\perp$, $T = P_A$. □

C. 谱分解

由线性代数知,任何正规矩阵都相似于对角形,而对角形是形如 $\mathrm{diag}(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ 的矩阵的线性组合. 类比于此,Hilbert 空间上的正规算子应能表示为正投影的某种"线性组合". 这一类的结果称为谱分解定理,它是 Hilbert 空间理论中最有意义的结果之一.

5.8.11 定义　设 Ω 是一 LCH, $\mathscr{B}$ 是其 Borel 集之全体, $\{P(B): B \in \mathscr{B}\}$ 是 H 上的一族正投影,它满足条件: $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = I$, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. $\forall x, y \in H$, 有 $\mu_{xy} \in M(\Omega)$ (依 § 5.6E),使得

$$\mu_{xy}(B) = \langle P(B)x, y\rangle \qquad (B \in \mathscr{B}), \tag{18}$$

则称 $P(\cdot)$ 为 Ω 上的一个**谱族**.

5.8.12 谱分解定理　设 $T \in L(H)$ 是正规算子, $\Omega = \sigma(T)$, 则存在 Ω 上的唯一谱族 $P(\cdot)$, 使得

(i) 存在连续的 $*$ 代数同态 $L^\infty(\Omega) \to L(H)$, $f(\lambda) \to f(T)$, 使得

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_\Omega f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{xy} \qquad (x, y \in H), \tag{19}$$

其中 μ_{xy} 依(18),当 $f(\lambda) \in C(\Omega)$ 时 $f(T)$ 决定于 § 5.7 中的对应(18)(换 x 为 T).

(ii) 若 B 是 Ω 的非空开子集，则 $P(B)\neq 0$.

(iii) 若 $S\in L(H)$ 与 T 可换，则 S 与每个 $f(T)(f(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega))$ 可换.

证 设 $\mathscr{A}$ 是由 $\{I,T,T^*\}$ 生成的 $L(H)$ 的闭子代数(依 5.7.12)，则依 §5.7(18)有等距的 * 代数同构

$$C(\Omega)\to\mathscr{A},\qquad f(\lambda)\to f(T). \tag{20}$$

$\forall x,y\in H$，令 $L_{xy}(f)=\langle f(T)x,y\rangle(f\in C(\Omega))$，则

$$|L_{xy}(f)|\leqslant\|f(T)\|\,\|x\|\,\|y\|=\|f\|_0\|x\|\,\|y\|,$$

可见 $L_{xy}(\cdot)\in C(\Omega)^*=M(\Omega)$ (依 5.6.3)，且 $\|L_{xy}\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$. 于是有 $\mu_{xy}\in M(\Omega)$，使得(19)对 $f(\lambda)\in C(\Omega)$ 成立，且 $\|\mu_{xy}\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$. 固定 $f(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega)$，因

$$\varphi(x,y)=\int_{\Omega}f(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xy}\qquad(x,y\in H)$$

是 Hermite 双线性泛函且 $|\varphi(x,y)|\leqslant\|f\|_{\infty}\|x\|\,\|y\|$，故由 5.8.7 有唯一的 $f(T)\in L(H)$，使得(19)成立且 $\|f(T)\|\leqslant\|f\|_{\infty}$. 若 $f(\lambda)\in C(\Omega)$，则 $f(T)$ 与由(20)决定的 $f(T)$ 一致，这就将映射(20)扩张为

$$L^{\infty}(\Omega)\to L(H),\qquad f(\lambda)\to f(T). \tag{21}$$

映射(21)显然是线性的. 任给 $f(\lambda),g(\lambda)\in C(\Omega),x,y\in H$，令 $z=f(T)^*y$，则

$$\int_{\Omega}g(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xz}=\langle g(T)x,z\rangle=\langle f(T)g(T)x,y\rangle$$
$$=\int_{\Omega}f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xy},$$

由 g 的任意性得 $\mathrm{d}\mu_{xz}=f\mathrm{d}\mu_{xy}$，进而对 $g(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega)$ 有

$$\langle(fg)(T)x,y\rangle=\int_{\Omega}f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xy}=\int_{\Omega}g(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xz}$$
$$=\langle g(T)x,z\rangle=\langle f(T)g(T)x,y\rangle,$$

即

$$\langle(fg)(T)x,y\rangle=\langle f(T)g(T)x,y\rangle\qquad(x,y\in H). \tag{22}$$

(22)同样适用于 $f(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega),g(\lambda)\in C(\Omega)$，故得 $\mathrm{d}\mu_{xz}=f\mathrm{d}\mu_{xy}(f(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega),z=f(T)^*y)$，而这又推出(22)对 $f(\lambda),g(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega)$ 成立，因此(21)是代数同态. 若 $f(\lambda)\in C(\Omega,\mathbf{R})$，则 $f(T)$ 是自伴的，于是

$$\int_{\Omega}f(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xy}=\overline{\langle f(T)y,x\rangle}=\int_{\Omega}f(\lambda)\mathrm{d}\bar{\mu}_{yx}.$$

由 f 的任意性得 $\mu_{xy}=\bar{\mu}_{yx}$，进而对 $f(\lambda)\in L^{\infty}(\Omega)$ 有

$$\langle f(T)x,y\rangle=\int_{\Omega}f(\lambda)\mathrm{d}\bar{\mu}_{yx}=\overline{\int_{\Omega}\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}\mu_{yx}}$$
$$=\overline{\langle\bar{f}(T)y,x\rangle}=\langle x,\bar{f}(T)y\rangle,$$

这推出 $f(T)^* = \bar{f}(T)$. 这就得出对应(21)为连续的 * 代数同态，结论(i)得证.

任给 Borel 集 $B\subset\Omega$，定义 $P(B)=\chi_B(T)$. 由(19)知 $P(B)$ 唯一决定于等式

$$\langle P(B)x,y\rangle = \int_B \mathrm{d}\mu_{xy} = \mu_{xy}(B) \qquad (x,y\in H). \tag{23}$$

利用(21)的 * 代数同态性质易验证，$P(\cdot)$ 满足定义 5.8.11 中诸条件，因而是 Ω 上的一个谱族.

设 B 是 Ω 的非空开子集. 若 $P(B)=0$，则 $\mu_{xy}(B)=0(\forall x,y\in H)$. 因 B 非空，必有 $0\neq f(\lambda)\in C_0(B)$. 令 $z=f(T)^*y$，则

$$\begin{aligned}\langle f(T),x,y\rangle &= \langle f(T)P(B)x,y\rangle\\ &= \langle P(B)x,z\rangle = \mu_{xz}(B)=0,\end{aligned}$$

这推出 $f(T)=0$，得出矛盾. 因此 $P(B)\neq 0$，结论(ii)得证.

设 $S\in L(H)$ 与 T 可换，则 S 与 $f(T)(f(\lambda)\in C(\Omega))$ 可换(依定理 5.7.12). 任给 $x,y\in H$，令 $u=Sx, v=S^*y$. $\forall f(\lambda)\in C(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\lambda)\mathrm{d}\mu_{uy} &= \langle f(T)Sx,y\rangle = \langle Sf(T)x,y\rangle\\ &= \langle f(T)x,v\rangle = \int_\Omega f(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xv},\end{aligned}$$

这推出 $\mu_{uy}=\mu_{xv}$. 而这又推出，$\forall f(\lambda)\in L^\infty(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}\langle f(T)Sx,y\rangle &= \int_\Omega f(\lambda)\mathrm{d}\mu_{uy} = \int_\Omega f(\lambda)\mathrm{d}\mu_{xv}\\ &= \langle f(T)x,v\rangle = \langle Sf(T)x,y\rangle,\end{aligned}$$

故得 $f(T)S=Sf(T)$. 结论(iii)得证. □

定理 5.8.12 中的 $P(\cdot)$ 称为 T 的谱族或**谱分解**.

谱分解定理有许多深刻的应用，可惜本书已没有篇幅来充分展开这些应用了. 下面仅举出两个初步的例子以作说明.

5.8.13 定理　设 $T\in L(H)$ 是正规算子，则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx,x\rangle|. \tag{24}$$

若进而设 T 是自伴算子，则

$$\begin{cases} m \triangleq \inf\limits_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle = \min\sigma(T),\\ M \triangleq \sup\limits_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle = \max\sigma(T).\end{cases} \tag{25}$$

证　对于(24)只需证：$\forall\varepsilon>0, \exists x\in H$，使得 $|\langle Tx,x\rangle|\geqslant\|T\|-\varepsilon$. 取 $\lambda_0\in\sigma(T)$，使 $\|T\|=|\lambda_0|$. 设 $P(\cdot)$ 是 T 的谱族，令 $B=\{\lambda\in\sigma(T): |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}$，则 B 是 $\sigma(T)$ 的非空开子集，因而 $P(B)\neq 0$. 取 $x\in H$，使

$\| x \| = 1, P(B)x = x$. 令 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\chi_B(\lambda)$, 则 $f(T) = (T - \lambda_0 I)P(B), f(T)x = Tx - \lambda_0 x$. 于是

$$\begin{aligned} | \langle Tx, x \rangle | &\geqslant | \langle \lambda_0 x, x \rangle | - | \langle f(T)x, x \rangle | \\ &\geqslant \| T \| - \| f(T) \| \geqslant \| T \| - \varepsilon, \end{aligned}$$

如所要证.

若 T 是自伴算子,则不妨设 $m \geqslant 0$ (否则以 $T - mI$ 代 T),则由已证的(24)有 $\| T \| = M$, 这推出 $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda \leqslant M$. 同理当 $\lambda \in \sigma(T)$ 时有 $\lambda \geqslant m$, 因此 $\sigma(T) \subset [m, M]$. 同样的结论得出 $M, m \in \sigma(T)$, 故(25)成立.

5.8.14 定理 设 $T \in L(H)$ 是非零的紧正规算子,则

$$T = \sum_n \lambda_n P_n, \tag{26}$$

$$\| Tx \|^2 = \sum_n | \lambda_n |^2 \| P_n x \|^2 \qquad (x \in H), \tag{27}$$

$\{\lambda_n\}$ 是 T 的非零谱值之全体, P_n 是正投影, $R(P_n) = N(\lambda_n I - T)$.

证 以 $\{\lambda_n\}$ 记 T 的非零谱值之全体(参看 5.1.22),可设其为无限集且 $| \lambda_1 | \geqslant | \lambda_2 | \geqslant \cdots$, 必定 $\lambda_n \to 0$. 设 $P(\cdot)$ 是 T 的谱族, $f(\lambda) \equiv \lambda, \varphi_j$ 是 $\{\lambda_j\}$ 的特征函数, $f_n = \sum_1^n \lambda_j \varphi_j$, 则在 $\sigma(T)$ 上 $\| f_n - f \|_0 \to 0$. 令 $P_n = \varphi_n(T)$, 则 P_n 是正投影,且

$$\left\| T - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \right\| \leqslant \| f - f_n \|_0 \to 0,$$

这得出分解式(26). 由 $\varphi_i \varphi_j = 0 (i \neq j)$ 推出 $P_i P_j = 0$, 可见 $R(P_i) \perp R(P_j)$. 于是, $\forall x \in H$, 有

$$\| Tx \|^2 = \sum_n | \lambda_n |^2 \| P_n x \|^2,$$

这得出(27). 直接看出 $R(P_n) \subset N(\lambda_n I - T)$. 若 $Tx = \lambda_n x$, 则

$$\begin{aligned} 0 = \| \lambda_n Tx - T^2 x \|^2 &= \left\| \sum_j (\lambda_n \lambda_j - \lambda_j^2) P_j x \right\|^2 \\ &= \sum_j | \lambda_j |^2 | \lambda_n - \lambda_j |^2 \| P_j x \|^2, \end{aligned}$$

这推出当 $j \neq n$ 时 $P_j x = 0$, 从而 $x = P_n x \in R(P_n)$. 故得

$$R(P_n) = N(\lambda_n I - T).$$ □

定理 5.8.14 可看作是一个无限维的对角化定理. 如果去掉 T 为紧算子这一条件,则仍可建立类似的定理,但分解式(26)需代以某个积分. 考虑 T 为自伴算子这一特殊情况. 设 m, M 依(25),则 $\Omega \triangleq \sigma(T) \subset [m, M]$. 设 $P(\cdot)$ 是 T 的谱族,令 $P_\lambda = P(\lambda) = P((-\infty, \lambda] \cup \sigma(T))$, 则当 $\lambda < m$ 时 $P_\lambda = 0$, $\lambda \geqslant M$ 时 $P_\lambda = I, \lambda < \mu \Rightarrow P_\lambda P_\mu = P_\lambda$. 任取 $a < m$, 取分划 $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = M$, 以 φ_t 记 $(-\infty, t] \cap \sigma(T)$ 的特征函数,则

$$
\begin{aligned}
&\left\| T - \sum_i \lambda_i (P(\lambda_i) - P(\lambda_{i-1})) \right\| \\
\leqslant &\sup_{\lambda \in \sigma(T)} \left| \lambda - \sum_i \lambda_i (\varphi_{\lambda_i}(\lambda) - \varphi_{\lambda_{i-1}}(\lambda)) \right| \\
\leqslant &\max_i (\lambda_i - \lambda_{i-1}),
\end{aligned}
$$

这表明

$$
T = \int_a^M \lambda \, \mathrm{d}P(\lambda), \tag{28}
$$

其中右端积分是 Riemann-Stielfjes 积分．一般地，对任何 $f(\lambda) \in C[a,M]$，有

$$
f(T) = \int_a^M f(\lambda) \mathrm{d}P(\lambda). \tag{29}
$$

公式(28)自然可看作分解式(26)的某种“连续型”推广．

附录　抽象空间选录

中文名词按汉语拼音字母顺序排列．凡在本书中出现的空间，均注明其首次出现的页数，即词条后面括号内的数字．

B

半度量空间(semi-metric space)，定义了某种"半度量"d的拓扑空间，$d: X \times X \to \mathbf{R}$. 称为半度量意味着$d$满足以下条件：$d(x,y) = d(y,x), d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$.

半序空间(semi-ordered space)，通常指定义了某个半序≤的拓扑向量空间，≤是连续的，且满足条件：$x_i \leqslant y_i (i = 1,2) \Rightarrow x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2; x \leqslant y, \alpha \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow \alpha x \leqslant \alpha y$. (178)

半自反空间(semi-reflexive sapce)，即满足条件 $X_w = (X_s^*)_w^*$ 的局部凸空间．(136)

不可约空间(irreducible sapce)，即其任何开覆盖具有最小开加细的拓扑空间．

B 代数(B-algebra)，或写作(B)代数，即 Banach 代数．(200)

B* 代数(B*-algegra)，或写作(B*)代数，即满足条件 $\|xx^*\| = \|x\|^2$ 的 * 代数．(207)

B 格(B-lattice)，即 Banach 格．(185)

B 空间(B-space)，或写作(B)空间，即 Banach 空间．

Baire 空间(Baire's space)，即第二纲的拓扑空间．(82)

Baire 零维空间(Baire's zero-dimensional space)，即积空间 X^ω，X 是某个离散空间．

Banach 代数(Banach algebra)，即完备赋范代数，由 Nagumo 于 1936 年首先引进．(200)

Banach 格(Banach lattice)，即 Banach 空间兼向量格，且满足条件 $|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$. (185)

Banach 空间(Banach space)，即完备赋范空间，它的基本概念由 Banach 与 Wiener 于 1922 年左右互相独立地提出．(31)

C

测度空间(measure space)是一个如下的三元组：$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$，其中 $(\Omega,\mathscr{A})$ 是一个可测空间，$\mu:\mathscr{A}\to[0,\infty]$ 是一个测度，即满足 $\mu\varnothing=0$ 的可数可加集函数．

超精密度量空间，即满足条件“$d(x,y)=d(a,b)\Rightarrow\{x,y\}=\{a,b\}$”的度量空间．

次仿紧空间(subparacompact space)，即其任何开覆盖具有 σ 局部有限闭加细的拓扑空间．

Cantor 连续统(Cantor continuum)，即 Cantor 三分集，它是一个典型的全断空间．

cosmic 空间(cosmic space)，即具有可数网络的正则空间．

cs-σ 空间(cs-σ- space)，即具有 σ 局部有限 cs 网的正则空间．

$C(\Omega)$，Ω 上的连续函数空间．若 Ω 是任意拓扑空间，则 $C(\Omega)$ 依点态收敛是一个局部凸空间；若 Ω 是一个第二可数的 LCH，则 $C(\Omega)$ 依紧一致收敛是一个 Fréchet 空间；若 Ω 是一个紧 T_2 空间，则 $C(\Omega)$ 依 sup 范数是一个 Banach 空间．

D

单调正规空间(monotonically normal space)，满足如下条件的拓扑空间：任给其中的不交闭集 A,B，存在开集 $V(A,B)$，使得 $A\subset V(A,B)\subset\subset B^c$，且当 $A\subset A_1,B\supset B_1$ 时 $V(A,B)\subset V(A_1,B_1)$.

第一可数空间(first countable space)，或满足第一可数性公理的空间，即每点有可数邻域基的拓扑空间．(17)

第二可数空间(second countable space)，或满足第二可数性公理的空间，即具有可数拓扑基的拓扑空间．(16)

点态空间(pointwise space)，即其连通紧子集必为单点集的拓扑空间．

点有限仿紧空间(pointwise paracompact space)，即其任意开覆盖有点有限开加细的拓扑空间，也称为点态仿紧空间或弱仿紧空间．

度量空间(metric space)，或称距离空间，是一个对 (X,d)，其中度量 d：$X\times X\to\mathbf{R}_+$ 满足如下度量公理：$d(x,y)=d(y,x)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y(\forall x,y,z\in X)$．度量空间乃由 Fréchet 于 1906 年首次引进．(26)

对称度量空间(symmetrie metrie space),即定义了某个对称度量 d 的拓扑空间. $d:X\times X\to\mathbf{R}_+$ 是对称度量意味着它满足以下条件: $d(x,y)=d(y,x)$, $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, $A\subset X$ 是闭集 $\Leftrightarrow\forall x\in A^c$, 有 $d(x,A)>0$.

(DF)空间((DF)-space),满足如下条件的局部凸空间 X: 它有有界集的基本序列,若 X^* 的强有界子集是可数多个等度连续集之并,则它也是等度连续的.

Dowke 空间(Dowke space),即非可数仿紧的正规空间,此种空间的存在首先由 E. Rudin 所构造的例子证实.

δ 空间(δ- space),即邻近空间.

E

2 进紧空间(dyadic compact space),即广义 Cantor 集 D^m 的连续象, m 是任意基数.

Euclid 空间(Euclidean space),即带有 Euclid 度量 d 的空间 $\mathbf{K}^n$($\mathbf{K}=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$), 其中 d 定义为$d(x,y)=|x-y|$, $|x|^2=\sum|x_i|^2$,d 定义 $\mathbf{K}^n$ 上的通常拓扑.

F

仿紧空间(paracompact space),即其任何开覆盖有局部有限开加细的拓扑空间. 仿紧空间由 Bourbaki 学派的代表人物 Dieudonné 于 1944 年引进.(64)

仿 Lindelöf 空间(Paralindelöf space),即其任何开覆盖有局部可数开加细的拓扑空间.

分解空间(decomposition space),即由某个等价关系定义的商拓扑空间.

分离一致空间(separated uniform space),即满足 T_2 分离公理的一致空间.

F 格(F-lattice),兼为 F 空间与向量格,且满足 $|x|\leqslant|y|\Rightarrow\|x\|\leqslant\|y\|$.

F 空间(F-space),或写作(F)空间,即 Fréchet 空间.

F_σ 度量空间(F_σ-metrizable space),即表为可度量化闭子空间之并的空间,系由 Gruenhage 于 1980 年引入.

FM 空间(FM-space),或(FM)空间,即同时为 Fréchet 空间的 Montel 空

间 .

Fréchet 空间(Fréchet space),即完备的赋准范空间,有些文献(如 Bourbaki)还将局部凸性作为 Fréchet 空间的必要条件 . (31)

赋范代数(normed algebra),兼为赋范空间与代数,且满足条件 $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$. (200)

赋范格(normed lattice),兼为赋范空间与向量格,且满足条件 $|x| \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$.

赋范环(normed ring),即赋范代数,但习惯上指含单位元的交换 B- 代数. 赋范环的研究起于 Nagumo(1936),而 Gelfand 的工作使其成为一个重要分支 .

赋范空间(normed space),是一个对 $(X, \|\cdot\|)$,其中范数 $\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}$ 满足如下范数公理: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (31)

赋范域(normed field),即其中任何非零元可逆的交换赋范代数 .

赋准范空间(pre-normed space),即定义了准范数 $\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}_+$ 的向量空间, $\|\cdot\|$ 满足以下条件: $\|\alpha x\| \leqslant \|x\| (|\alpha| \leqslant 1)$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \|\alpha_n x\| = 0$. (31)

G

光滑赋范空间(smooth normed space),即其范数除原点外处处 G 可微的赋范空间 . (168)

归纳极限(inductive limit),表为 $X = \varinjlim X_n$ 的局部凸空间,其中 X_n 是局部凸空间, X_n 是 X_{n+1} 的闭子空间. 任给凸集 $V \subset X$, V 是 X 的 0-邻域 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}$, $V \cap X_n$ 是 X_n 的 0-邻域 . (133)

H

核空间(nuclear space),满足如下条件的局部凸空间 X: 任给绝对凸 0-邻域 V, 存在绝对凸 0-邻域 $U \subset V$, 使得正则映射 $X_U \to \hat{X}_V$ 是核映射,此处 $\hat{X}_V$ 是 X_V 的完备化, $X_V = X/N_V$, $N_V = \{x : \mu_V(x) = 0\}$, μ_V 是 Minkowski 泛函. 核空间由 Grothendieck 于 1955 年引进 .

弧状连通空间(arcwise connected space),即路连通空间 .

Hardy 空间(Hardy space),定义为

$$H^p(\Gamma) = \left\{u \in L^p(\Gamma): \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})e^{in\theta}\mathrm{d}\theta = 0(\forall n \in \mathbf{N})\right\},$$

其中 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$\Gamma$ 是单位圆周.

Hausdorff 空间(Hausdorff space)，即 T_2 拓扑空间.(19)

Hausdorff 一致空间(Hausdorff uniform space)，即分离一致空间.

Hilbert 方体(Hilbert cube)，即 $\{x \in l^2: |x_i| \leqslant 1/i(\forall i \in \mathbf{N})\}$，它同胚于紧空间 $[0,1]^\omega$.

Hilbert 空间(Hilbert space)，即完备内积空间. Hilbert 本人开创了关于 L^2 空间的理论，而抽象的 Hilbert 空间则由 Neumann 于 1929 年引进.(32)

J

积空间(product space)，向量空间、拓扑空间、一致空间与拓扑向量空间都能以自然的方式形成积空间.

集态正规空间(collectionwise normal space)，即其中任何离散闭集族可用不交开集族分离的 T_2 空间.

极不连通空间(extremally disconnected space)，即其中开集之闭包恒为开闭集的拓扑空间.

检验函数空间(testing function space) $\mathscr{D}(\Omega)$，定义为归纳极限：$\mathscr{D}(\Omega) = \varinjlim \mathscr{D}(K_n)$，其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是某个开集，$\{K_n\}$ 是 Ω 中紧集的穷竭序列.(140)

紧空间(compact space)，即其任何开覆盖有有限子覆盖的拓扑空间.(50)

紧统(compactum)，即紧度量空间.

局部紧空间(locally compact space)，即其中每点有紧邻域的拓扑空间.(54)

局部连通空间(locally connected space)，即其中每点有连通邻域基的拓扑空间.(60)

局部路连通空间(locally path-connected sapce)，即其中每点有路连通邻域基的拓扑空间.(60)

局部凸空间(locally convex space)，即有凸局部基的拓扑向量空间. 强调局部凸空间在现代泛函分析中的中心作用，是 Bourbaki 学派的重要贡献之一.(30)

局部一致凸空间(locally uniformly convex space)，满足如下条件的赋范空间 X：$\forall x \in X$，$\|x\| = 1$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $y \in X$，$\|y\| = 1$，$\|x + y\| > 2(1-\delta)$ 时 $\|x - y\| < \varepsilon$.(163)

局部有界空间(locally bounded space),即存在有界 0-邻域的拓扑向量空间.(102)

聚点紧空间(accumulation point compact space),即其无限子集必有聚点的拓扑空间.(53)

绝对 G_δ 空间(absolute G_δ space),即在其任何 T_2 扩张空间中为 G_δ 集的全正则空间.

绝对邻域收缩核(absolute neighborhood retract). 设 S 是闭遗传空间类,若 X 是任何以 X 为闭子集的 $Y \in S$ 的邻域收缩核,则称 X 为关于 S 的绝对邻域收缩核,记作 ANR (S).

绝对收缩核(absolute retract). 设 S 是闭遗传空间类,若 X 是任何以 X 为闭子集的 $Y \in S$ 的收缩核,则称 X 为关于 S 的绝对收缩核,记作 AR(S).

James 空间(James space),由收敛于零的实数列构成,其范数定义为:$\| x \| = \sup\left[\sum_1^n (x_{k_{2i}} - x_{k_{2i-1}})^2 + x_{k_{2n+1}}^2\right]^{1/2} (< \infty)$, sup 是对一切 $n \in N$ 与满足 $k_1 < k_2 < \cdots$ 的序列 $\{k_n\}$ 取的.

K

可测空间(measurable space),即一个对 $(\Omega, \mathscr{A})$, 其中 $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的 σ- 代数,即 $\mathscr{A} \subset 2^\Omega, \varnothing \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ 对可数并运算与补运算封闭.

可度量化空间(metrizable space). 可度量化拓扑空间即其拓扑为度量拓扑的拓扑空间,可度量化一致空间即其一致结构可由某个度量生成的一致空间.

可分空间(separable space),即存在可数稠子集的拓扑空间.(85)

可赋范空间(nordmable space),即其拓扑是范数拓扑的拓扑向量空间.

可数紧空间(countably compact space),即其任何可数开覆盖有有限子覆盖的拓扑空间.(53)

可数仿紧空间(countably paracompact space),即其任何可数开覆盖有局部有限开加细的拓扑空间.

可数型空间(countable type space),即满足如下条件的拓扑空间 X: 任给紧集 $K \subset X$, 有紧集 $B \supset K$, 使 B 有可数邻域基.

可缩空间(contractible space),即其上的单位映射同伦于常值映射的拓扑空间.

可一致化空间(uniformizable space),即其拓扑是一致拓扑的拓扑空间,实际上就是全正则空间.

可展空间(developable space),具有由开覆盖组成的展开列的拓扑空间.

k 空间（k- space），或 K 空间，即这样的拓扑空间 (X,τ)：任给 $G\subset X$，$G\in\tau\Leftrightarrow$ 对任给紧集 $K\subset X$，$G\cap K$ 在 K 中是开的．

L

离散空间（discrete space）．离散拓扑空间 (X,τ)，其中 $\tau=2^X$；离散一致空间 $(X,\mathscr{U})$，其中 $\mathscr{U}=\{U\subset X\times X:\Delta\subset U\}$；离散度量空间 (X,d)，$d(x,y)=1(x\neq y)$．

连通空间（connected space），即不能分解为一对互补的非空开集之并的拓扑空间．（57）

列型空间（sequential space），即其列型闭集均为闭集的拓扑空间．$A\subset X$ 是列型闭集$\Leftrightarrow$对任何收敛序列 $\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x$，$B=\{x_n\}\cup\{x\}$，$A\cap B$ 在 B 中为闭集．

邻近空间（proximity space）是一个对 (X,δ)，δ 是 X 的子集间的一个关系，它满足以下条件：$A\delta B\Leftrightarrow B\delta A$，$(A\cup B)\delta C\Leftrightarrow A\delta C$ 或 $B\delta C$，$\{x\}\ \delta\{y\}\Leftrightarrow x=y$，$X\,\delta\,\varnothing$，$A\bar{\delta}B\Rightarrow X=C\cup D$，$A\bar{\delta}D$，$B\bar{\delta}C$，$\bar{\delta}$ 表示 δ 的否定．

邻域收缩核（neighborhood retract）：A 为 B 的邻域收缩核意味着 A 是 B 的某邻域的收缩核．

路连通空间（pathconnected space），即其中任两点可用连续曲线连接的拓扑空间．（59）

L^p 空间（L^p- space），即 p 次可积函数空间（若 $p<\infty$）或本性有界函数空间（若 $p=\infty$）．（191）

$l^p=l^p(\mathbf{N},\mu)$，μ 是 $\mathbf{N}$ 上的计数测度．（192）

LB 空间（LB-space），或（LB）空间，即 $X=\varinjlim X_n$，其中 X_n 均为 Banach 空间．

Lebesgue 空间，即 L^p 空间．

LF 空间（LF-space），或（LF）空间，即 $X=\varinjlim X_n$，其中 X_n 均为局部凸的 Fréchet 空间．（133）

Lindelöf 空间（Lindelöf sapce），即其任何开覆盖有可数子覆盖的拓扑空间．

M

满正规空间（fully normal sapce），即其任何开覆盖为正规覆盖的拓扑空间．

门空间(door space),即其任何子集非开即闭的拓扑空间.

幂空间(power sapce) 2^X,表拓扑空间 X 的非空闭集之全体,其中使用 Vietoris 拓扑. 当 X 是紧度量空间时,Vietoris 拓扑即 Hausdorff 度量的拓扑.

M 空间(M-space),即 Montel 空间.

Mackey 空间(Mackey space),是一类局部凸空间 (X,τ),对于 X 上真强于 τ 的局部凸拓扑 τ_1,有 $(X,\tau)^* \neq (X,\tau_1)^*$.(136)

Michael 直线(Michael line),即装备拓扑 $\{U \cup A : U \in \tau, A \subset S\}$ 的区间 $I = [0,1]$,其中 τ 是通常拓扑,$S \subset I$ 有性质:S 与 $I \backslash S$ 在 I 中稠密且都有连续统基数.

Montel 空间(Montel space),即其中有界闭集均为紧集的桶空间.(130)

Moore 空间(Moore space),即正则的可展空间.

***m* 仿紧空间**(m- paracompact space),即任何基数 $\leqslant m$ 的开覆盖都有局部有限开加细的拓扑空间,Morita 在 1962 年考虑了这种空间.

μ 空间(μ- space),即仿紧 F_σ 可度量化空间的可数积的子空间.

N

内积空间(inner product space),是定义了内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbf{K}$ 的空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足以下内积公理:$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,$\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$,$\langle x,x\rangle \geqslant 0$,$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.(32)

拟赋范空间(quasi-normed space),即定义了拟范数 $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_+$ 的空间,$\|\cdot\|$ 满足以下条件:$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;$\|x+y\| \leqslant \beta(\|x\| + \|y\|)$,$\beta \geqslant 1$ 为常数;$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 一个拓扑向量空间可赋拟范数的充要条件是它是局部有界空间.

拟桶空间(quasi-barrelled sapce),即其中吸收有界集的桶均为 0-邻域的局部凸空间.

拟完备空间(quasi-complete space),即其中的有界 Cauchy 网均收敛的拓扑向量空间.(136)

拟自反空间(quasi-reflexive space),即满足条件 $\dim(X^{**}/X) < \infty$ 的 Banach 空间.

Niemytzki 半平面(Niemytzki half plane)是一个拓扑空间 (X,τ),其中 $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geqslant 0\}$,$\tau$ 包含 $\mathbf{R} \times (0,\infty)$ 的通常开子集,$\forall r > 0, x \in \mathbf{R}$,$B_r((x,r)) \cup \{(x,0)\}$ 是点 $(x,0)$ 的邻域. X 是完全正则空间而非正则空间.

O

Orlicz 空间(Orlicz space). 设 $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ 是有限测度空间, $L_M(\Omega,\mathscr{A},\mu)=\{x\in S(\Omega):\exists\alpha>0,$使$\int_\Omega M(\alpha\mid x(t))\mathrm{d}\mu<\infty\}$ 依适当范数称为 Orlicz 空间, $M(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶凸函数, 满足 $M(x)>0(x\neq 0)$, $\lim\limits_{x\to 0}x^{-1}M(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x/M(x)=0$.

Q

齐次空间(homogeneous space),即空间中任何两点可通过一同胚映射互相变换的拓扑空间.

强仿紧空间(strongly paracompact space),即其任何开覆盖有星有限开加细的拓扑空间.

全断空间(totally disconnected space),即无两点以上连通子集的拓扑空间.

全有界空间(completely bounded space),是一类一致空间 $(X,\mathscr{U})$, 任给 $U\in\mathscr{U}$, 存在有限子集 $B\subset X$, 使得 $X=U(B)$. (77)

全正规空间(completely normal space),即遗传正规空间.(48)

全正则空间(completely regular space),即其中的点与不含该点的闭集可函数分离的 T_2 空间. 有些文献不要求 T_2 分离性.(44)

R

***r* 空间**(r- sapce),是满足如下条件的拓扑空间 X: $\forall x\in X$, 存在 x 的开邻域序列 $\{U_n\}$, $\forall x_n\in U_n$, $\{x_n\}$ 必含于 X 的某紧子集内.

Riesz 空间(Riesz space),Bourbaki 称向量格为 Riesz 空间.

弱仿紧空间(weakly paracompact space),即点有限仿紧空间.

S

商空间(quotient space),向量空间、拓扑空间、拓扑向量空间、赋准范空间与赋范空间,均可依自然的方式构成商空间.

实紧空间(real compact sapce),是一类全正则空间,它依 $C(X)$ 生成的一

致结构完备.

收敛数列空间 c,它作为 l^∞ 的闭子空间是一个 Banach 空间.

收缩核(retract). 若 A 是拓扑空间 X 的子集,存在 $r \in C(X,A)$,使得 $r \mid A = 1_A$,则称 A 为 X 的收缩核.

S 空间(S- space),即强仿紧空间.

Sobolev 空间(Sobolev space),由俄罗斯数学家 Sobolev 在研究数学物理问题的广义解时引入的一族空间,其中的空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 可描述如下:$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一开集,$1 \leqslant p < \infty$,定义

$$\| u \|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \| \partial^\alpha u \|_p^p \Big)^{1/p},$$

则 $H^{m,p}(\Omega)$ 定义为赋范空间 $\{u \in C^m(\Omega): \| u \|_{m,p} < \infty\}$ 的完备化.(195)

Sorgenfrey 线(Sorgenfrey line),即具有半开区间拓扑的实直线.(68)

Souslin 空间(Souslin space),即其不交非空开集族至多为可数族的拓扑空间.

素空间(prime space),即同构于其每个无穷维可余子空间的无穷维 Banach 空间.

速降函数空间 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ (rapidly decreasing function space),对任何 $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}_+^n$,使 $x^\alpha \partial^\beta u(x)$ 有界的 C^∞ 函数依一定半范族构成的 Fréchet 空间.(140)

T

桶空间(barreled space),即其中的绝对凸闭吸收集均为 0-邻域的局部凸空间.(130)

拓扑群(topological group),兼为拓扑空间与群,且其中的群运算连续.

拓扑空间(topological space)是一个对 (X,τ),其中开集族或拓扑 $\tau \subset 2^X$ 满足以下开集公理:τ 对任意并与有限交运算封闭且 $X,\varnothing \in \tau$. 拓扑空间是 Hausdorff 于 1910 年引进的.(15)

拓扑向量空间(topological vector space),兼为拓扑空间与向量空间,其中的线性运算连续.(28)

T_0 空间(T_0-space),即其中不同的点有不同邻域系的拓扑空间.(44)

T_1 空间(T_1-space),即其中的单点集均为闭集的拓扑空间.(44)

T_2 空间(T_2-space),即其中两相异点可邻域分离的拓扑空间.(19)

$T_{5/2}$ 空间($T_{5/2}$-space),即其中两相异点可闭邻域分离的拓扑空间.

T_3 空间(T_3-space),即正则空间. 也有些文献要求正则空间是 T_2 空间,而 T_3 空间不必是 T_2 空间.(44)

$T_{3\frac{1}{2}}$ 空间($T_{3\frac{1}{2}}$-space),即全正则空间．也有些文献不要求 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间是 T_2 空间．(45)

T_4 空间(T_4-space),即正规空间．也有些文献不要求 T_4 空间是 T_2 空间.(47)

T_5 空间(T_5-space),即全正规空间．(48)

T_6 空间(T_6-space),即完正规空间．(49)

Tychonoff 板(Tychonoff plank),即 $[0,\omega]\times[0,\omega_1]$,它是正规的而不是遗传正规的。

Tychonoff 空间(Tychonoff space),即全正则空间．(45)

U

U 空间(unitary space),即内积空间.

Urysohn 空间(Urysohn space),即其中的相异点可函数分离的拓扑空间.

W

完全可分空间(perfectly separable space),即第二可数空间．

完正规空间(perfectly normal space),即其闭子集均为零集的 T_2 空间．(49)

万有空间(universal space). 若空间 X 具有性质 P,且有性质 P 的空间都可嵌入 X 中,则称 X 为 P 的万有空间．(46)

伪度量空间(pseudo-metric space),即定义了伪度量 $d:X\times X\to\mathbf{R}_+$ 的空间,d 满足以下条件:$0=d(x,x)\leqslant d(x,y)=d(y,x)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

伪紧空间(pseudo-compact space),即其上的实连续函数均有界的拓扑空间．(53)

X

向量格(vector lattice),同时是格的实向量空间,其中的半序≤满足条件:$x_i\leqslant y_i(i=1,2)\Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$;$x\leqslant y,\alpha\geqslant 0\Rightarrow \alpha x\leqslant \alpha y$. 向量格是 Birkhoff 引进的．

线性度量空间(linearly metric sapce),定义了度量 d 的向量空间,其中的度量拓扑是向量拓扑．

线性赋范空间(linearly normed space),即赋范空间.

线性拓扑空间(linearly topological space),即拓扑向量空间.

序列紧空间(sequentially compact space),即其中任何序列有收敛子列的拓扑空间;亦称列紧空间.(53)

序列完备空间(sequentially complete space),即其中任何 Cauchy 列收敛的一致空间或拓扑向量空间.(76)

Y

亚紧空间(metacompact space),即点有限仿紧空间.

严格凸空间(strictly convex space),即单位球面不包含非退化线段的赋范空间.(160)

遗传正规空间(hereditarily normal space),即其子空间均为正规空间的拓扑空间.

一致光滑空间(uniformly smooth space)是一类赋范空间,它满足以下条件:$\forall \varepsilon, \eta > 0, \varepsilon < \eta, \exists \delta > 0$,当 $\varepsilon < \|x\|, \|y\| < \eta, \|x-y\| < \delta$ 时,$\|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\| + \varepsilon\|x-y\|$.(164)

一致空间(uniform sapce) $(X, \mathscr{U})$,$\mathscr{U} \subset 2^{X \times X}$ 是一个滤子且满足条件:$\Delta = \bigcap \mathscr{U}$; $\forall U \in \mathscr{U}, \exists V, W \in \mathscr{U}$,使得 $V^{-1} \subset U, W \circ W \subset U$.(24)

一致凸空间(uniformly convex space),即满足条件“$\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x+y\| \to 2 \Rightarrow \|x-y\| \to 0$”的赋范空间.一致凸空间由 Clarkson 于 1936 年引进.Clarkson 首先证明了空间 $L^p(1 < p < \infty)$ 是一致凸空间.(164)

有界闭空间(boundedly closed space).设 X 是局部凸空间,X^* 上所有在弱有界子集上有界的线性泛函之全体构成 X 的有界闭包,当它与 X 重合时称 X 为有界闭空间.

有界型空间(bornological space),又称囿空间,即其中的有界半范皆连续的局部凸空间.(129)

有序 Banach 空间(ordered Banach space),即其中已由某个序锥导入半序的 Banach 空间.

预紧空间(precompact sapce).预紧一致(度量)空间就是全有界一致(度量)空间.

Z

正规空间(normal space),即其中不相交的两闭集可邻域分离的 T_2 空间.(47)

正则空间(regular space),即其中的点与不含该点的闭集可邻域分离的 T_2 空间.(44)

自反空间(reflexive sapce),即在正则嵌入下 $X \cong X^{**}$ 的 Banach 空间,或满足 $X = (X_s^*)_s^*$ 的局部凸空间. 自反空间这一术语由 Lorch 于 1939 年首次使用.(157)

族正规空间(collectionwise normal space),即满足如下条件的拓扑空间:任给离散闭集族 $\{F_\alpha\}$,存在不相交的开集族 $\{G_\alpha\}$,使得 $F_\alpha \subset G_\alpha$.